Matematik center

Lektiecaféer på skoler i hele landet

Online lektiehjælp på www.webmatematik.dk

Hjælp til eksamensforberedelse i Eksamenscaféer

Formelsamling A-niveau

Maj 2017

Indhold

1 Vektorer i 2D

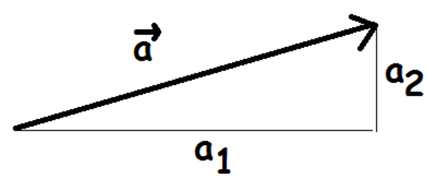
1.1 Vektorer

En vektor er en pil, der har en længde og en retning. Man betegner oftest vektorer med små bogstaver med en lille pil over.

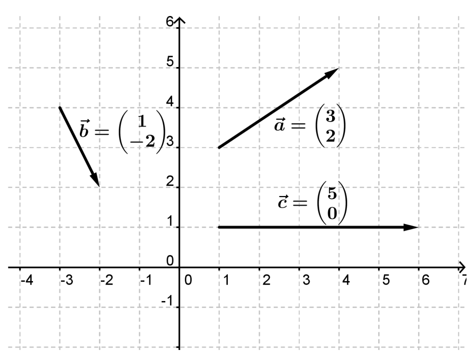
$$\overrightarrow{a}$$

En vektor har to koordinater, der beskriver hvor lang vektoren er i hhv. x-aksens og y-aksens retning. Man skriver koordinaterne i en søjle med x-koordinaten øverst og y-koordinaten nederst.

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

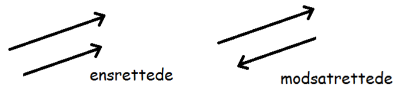


Her er eksempler på nogle vektorer med koordinater angivet



1.1.1 Ensrettede og modsatrettede vektorer

To vektorer, der er parallelle og har samme retning, kaldes ensrettede, mens to parallelle vektorer med hver sin retning kaldes modsatrettede.



1.1.2 Nulvektoren og egentlige vektorer

Den vektor, der har koordinaterne (0, 0) kaldes for nulvektoren

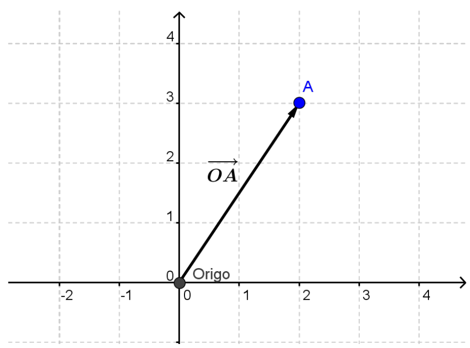
$$\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nulvektoren har samme start- og slutpunkt. Den har derfor ingen længde.
Alle vektorer, der ikke er nulvektoren, kaldes for egentlige vektorer.

1.1.3 Stedvektor

Hvis man er givet et punkt i planen, kan man tegne en vektor fra origo (punktet (0, 0)) hen til punktet. Denne vektor kaldes punktets stedvektor. Den betegnes med

$$\overrightarrow{OA}$$

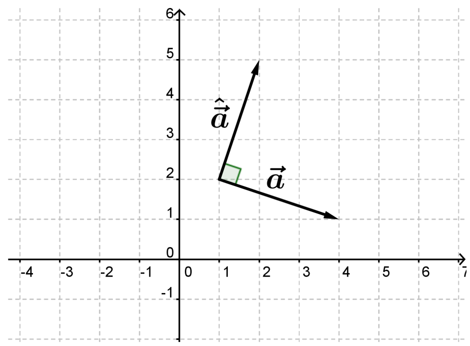


Stedvektoren til et punkt har samme koordinater som punktets koordinater.

$$A = (a_1, a_2) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

1.1.4 Tværvektor

Hvis man har en vektor, kan man danne dens tværvektor. Tværvektoren har samme længde som den oprindelige vektor, men er drejet 90° mod urets retning. Tværvektoren betegnes med at sætte en lille "hat"(dvs ˆ) ovenpå vektoren.



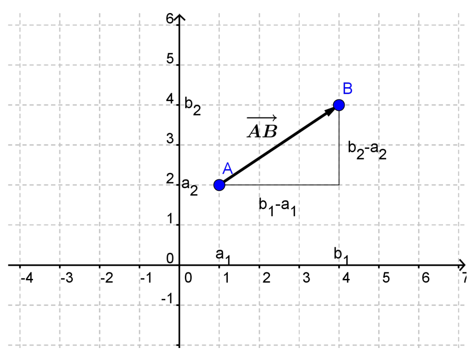
Tværvektorens koordinater fås ved at bytte om på den oprindelige vektors koordinater og sætte et minus foran første koordinaten.

$$\hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Tværvektoren til en vektor a kaldes tit for "a hat", og det at finde tværvektoren kaldes tit "at hatte a".

1.1.5 Vektor mellem to punkter

Hvis man har to punkter, kan man tegne en vektor mellem dem.



Vektoren vil have koordinaterne

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

1.1.6 Enhedsvektor

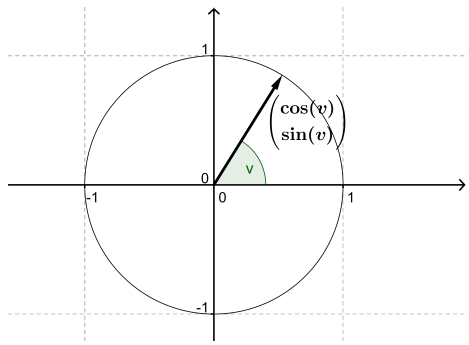
En enhedsvektor er en vektor, der har længde 1. F.eks vektoren

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

For hver vinkel v, kan man danne enhedsvektoren

$$\begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$$

der har længde 1 på grund af grundrelationen



Hvis man har en vektor, a, kan man forkorte den, så man får en enhedsvektor, e, med samme retning ved hjælp af denne formel

$$\overrightarrow{e} = \frac{1}{|\overrightarrow{a}|}\overrightarrow{a}$$

1.2 Længde og afstandsformlen

Man betegner længden af en vektor som

$$|\overrightarrow{a}|$$

Man finder længden af en vektor ved følgende formel

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

1.2.1 Afstandsformlen

Når man vil bestemme afstanden mellem to punkter, så er det det samme som at finde længden af vektoren mellem de to punkter. Altså kan man sige, at

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}|$$

Her betyder venstresiden "længden af linjestykket mellem A og B"og højresiden betyder "længden af vektor AB".
For at finde afstanden mellem to punkter kan vi altså bruge formlen for længden af en vektor, hvor vi indsætter koordinaterne for vektor AB.

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

1.3 Regning med vektorer

Man lægger to vektorer sammen ved at lægge dem sammen koordinatvist. Man lægger altså førstekoordinaterne sammen og bagefter lægger man andenkoordinaterne sammen

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Når man trækker vektorer fra hinanden, gør man det ligeledes koordinatvist.

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

Når man ganger et tal med en vektor, ganger man tallet ind på hver koordinat.

$$t \cdot \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} t \cdot a_1 \\ t \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

F.eks. er

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

1.4 Regneregler

Der findes visse regneregler for vektorer

$$1.\quad \bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a} \tag{1}$$

$$2.\quad (\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c}) \tag{2}$$

$$3.\quad t(\bar{a}+\bar{b})=t\bar{a}+t\bar{b} \tag{3}$$

$$4.\quad (s+t)\bar{a}=s\bar{a}+t\bar{a} \tag{4}$$

$$5.\quad s\cdot(t\cdot\bar{a})=(s\cdot t)\bar{a} \tag{5}$$

1.5 Skalarprodukt

Som nævnt tidligere kan man ikke gange to vektorer med hinanden. I stedet kan man tage *skalarproduktet* af to vektorer. Man finder skalarproduktet ved at gange førstekoordinaterne med hinanden og lægge det til produktet af andenkoordinaterne.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Bemærk, at skalarproduktet af to vektorer giver et tal!

1.5.1 Regneregler for skalarprodukt

Ligesom der er regneregler for addition og subtraktion af vektorer, så gælder der regneregler for skalarproduktet.

$$1.\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$2.\quad \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$3.\quad t(\vec{a}\cdot\vec{b})=(t\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(t\vec{b})$$

$$4.\quad \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$$

1.6 Vinkel mellem vektorer

Hvis man tegner to (egentlige) vektorer ud fra samme begyndelsespunkt, vil der dannes en vinkel mellem dem. Man kan beregne denne vinkel vha. følgende formel

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad , \qquad \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$$

cosinus til vinklen mellem to vektorer er altså skalarproduktet af divideret med produktet af deres længder.

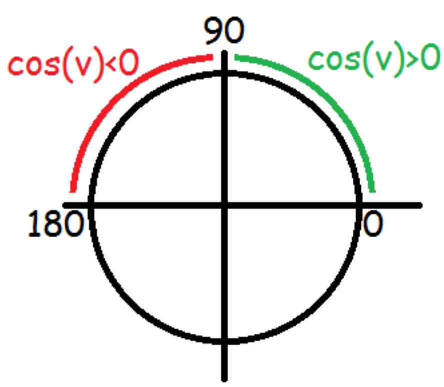
1.6.1 Skalarprodukt og vinkel

I formlen for vinklen mellem to vektorer indgår et skalarprodukt. Lad os prøve at isolere det.

$$\cos(v) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos(v) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Hvis skalarproduktet (venstresiden) er positiv, så er højresiden også positiv. Da længderne af a og b altid er positive, betyder det at cos(v) er positiv. cos(v) er positiv, når v er under 90°.
Hvis skalarproduktet er negativt, så er højresiden også negativ. Men da længderne altid er positive, betyder det, at cos(v) er negativ. cos(v) er negativ når v ligger mellem 90 og 180°.
Hvis skalarproduktet er 0, så er højresiden 0. Det betyder at cos(v) er 0. Og det betyder at vinklen mellem vektorerne er 90°



Altså kan vi sige

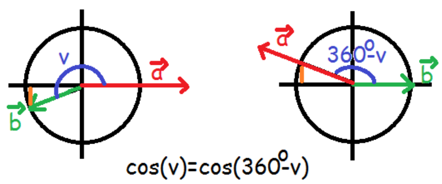
$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad v \text{ er spids}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad v \text{ er stump}$$

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v \text{ er ret}$$

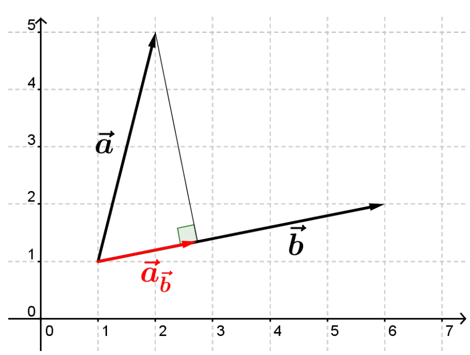
1.6.2 Hvad hvis vinklen mellem vektorerne er over 180°?

Hvis vinklen mellem vektor a og vektor b er over 180, så vil vinklen mellem vektor b og vektor a være mindre end 180. De to vinkler vil tilmed have samme cosinus-værdi, så det er ikke noget, man behøver tænke over i udregningerne. Når man taler om vinklen mellem to vektorer, vil man typisk tale om den under 180.



1.7 Projektion af vektor på vektor

Givet to egentlige vektorer kan man projektere den ene ned på den anden. Hvis man har tegnet de to vektorer fra samme begyndelsespunkt, svarer det til at gå vinkelret fra spidsen af den ene ned på den anden vektor. Vektoren fra begyndelsespunktet og hen til det punkt, man rammer, er projektionsvektoren.



Projektionsvektoren vil selvfølgelig være parallel med den vektor, man projekterer ned på.
Der findes en formel til at beregne projektionsvektorens koordinater

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$

Man skal holde tungen lige i munden med, hvad der er hvad. I tælleren har vi et skalarprodukt. Prikken er altså en prik. Skalarproduktet er et tal og nævneren, der består af en længde, er også et tal. Dermed giver hele brøken et tal. Højresiden skal altså læses som et tal ganget med vektor b. Den sidste prik er altså et gangetegn og ikke en prik.

1.7.1 Længde af projektion

Projektionen af en vektor ned på en anden vektor har selvfølgelig også en længde. Formlen for længden af projektionen af en vektor er

$$\left|\vec{a}_{\vec{b}}\right| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|} \ ,$$

som siger at længden af projektionen af vektor $\vec{a}$ på vektor $\vec{b}$ er givet som den absolutte værdi (også kaldet den numeriske værdi) af skalarproduktet mellem de to vektorer delt med længden af vektor $\vec{b}$.
Lad os se på hvorfor formlen ser sådan ud. Hvis vi tager udgangspunkt i formlen for projektionen af en vektor på en vektor

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}$$

så kan vi tage længden af dette udtryk og få

$$\left|\vec{a}_{\vec{b}}\right| = \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b}\right| \ .$$

Da $\vec{a}\cdot\vec{b}$ er et tal kan vi betegne det med k. Dermed har vi

$$\left|k\cdot\vec{b}\right|$$

stående i tælleren. Dette er dog det samme som

$$|k|\cdot\left|\vec{b}\right| \ .$$

Sætter vi dette ind i formlen ovenfor får vi

$$\left|\vec{a}_{\vec{b}}\right| = \frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{|\vec{b}|^2}\cdot\left|\vec{b}\right| = \frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{|\vec{b}|}$$

da

$$\left|\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{b}\right| .$$

1.8 Determinant

Når man har to vektorer kan man finde deres determinant. Man får determinanten ved at hatte den første vektor og prikke med den anden.

$$\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \hat{\overrightarrow{a}} \cdot \overrightarrow{b} = a_1b_2 - a_2b_1$$

Der findes to måder at notere determinanten på. Enten ved at skrive *det* eller også ved at skrive de to vektorers koordinater op i et skema som vist nedenfor. Her betyder de lodrette streger altså hverken "længde"eller "numerisk værdi"men i stedet "determinant".

$$\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Hvis man skriver determinanten op på den sidste måde, er den let at regne ud. Man skal nemlig bare gange over kors.
Først ganger man øverste venstre med nederste højre, hvorfra man trækker nederste venstre ganget med øverste højre.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

1.8.1 Areal og determinant

Determinanten af to vektorer er et tal. Den numeriske værdi af dette tal svarer til arealet af det parallelogram, som de to vektorer udspænder.

$$A_{parallelogram} = |\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})|$$

$$A_{parallellogram} = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \right\|$$

Her skal man igen være lidt opmærksom på de lodrette streger. De yderste betyder "numerisk værdi", mens de inderste betyder "determinant".

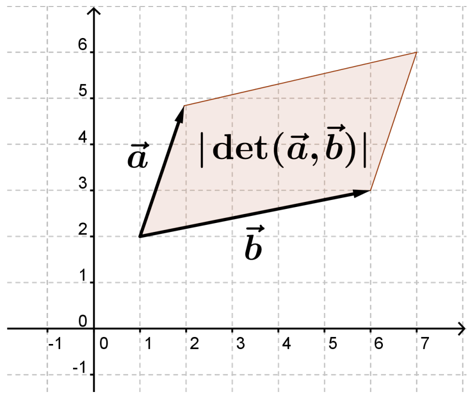
1.8.2 Parallelle vektorer og determinant

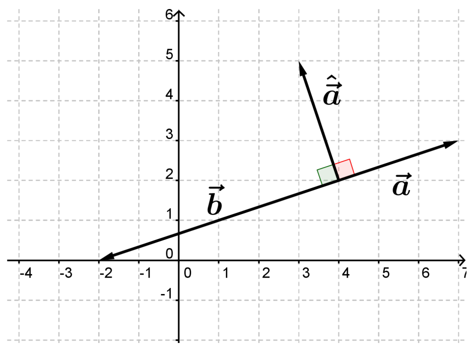
Hvis determinanten af to vektorer er 0, så er vektorerne parallelle. Skrevet matematisk er det:

$$\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$$

Grunden til dette er, at determinanten er defineret som skalarproduktet mellem a hat og b. Hvis dette skalarprodukt giver 0, betyder det at de to vektorer står vinkelret på hinanden. Hvis b er vinkelret på a hat, så er b parallel med a.

Bemærk, at hvis a og b er parallele, så kan de enten være ensrettede eller modsatrettede.





1.9 Linjens ligning

1.9.1 Linjens ligning

På C-niveau lærte vi, at en ret linje har ligningen

$$y = ax + b$$

På B-niveau lærte vi, at en ret linje også kan have ligningen

$$y = y_0 + a(x - x_0)$$

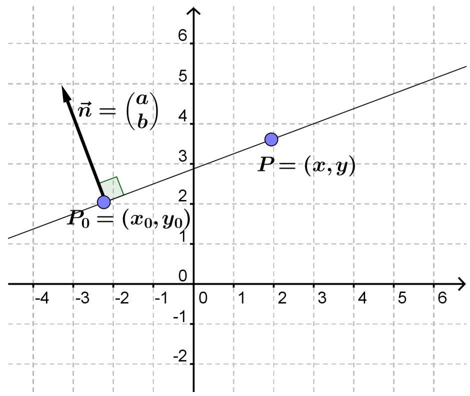
hvor (x_0, y_0) er et kendt punkt på linjen.
På A-niveau lærer vi en ny måde at skrive ligningen for en ret linje på. Det er

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

hvor

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

er en normalvektor til linjen. Dvs. den står vinkelret på linjen.



Så hvis vi kender en normalvektor til linjen og et punkt på linjen, så kan vi altså bestemme en ligning for linjen.

1.10 Linjens parameterfremstilling

I stedet for at beskrive en linje ved hjælp af en ligning, kan man gøre det ved hjælp af en *parameterfremstilling*. I en parameterfremtilling indfører man en parameter, der typisk kaldes t, og så ser man, hvordan et punkt (x, y) bevæger sig som funktion af t.
Linjens parameterfremstilling ser sådan her ud: Et punkt (x, y) ligger på linjen, når

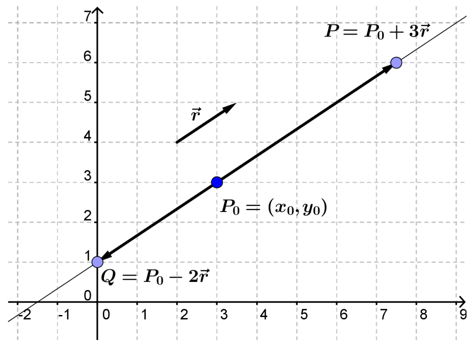
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

Her er (x_0,y_0) et punkt på linjen, og vektor r er en retningsvektor for linjen.
Parameterfremstillingen fungerer på den måde, at man starter i sit faste punkt, og så går man en eller anden forlængelse (eller forkortelse) af retningsvektoren ud. På den måde, kan man ramme alle punkter på linjen. Det er størrelsen af t, der afgør, hvor meget man forlænger/forkorter retningsvektoren.
Nedenfor er tegnet et eksempel, hvor man sætter t=3 og t=-2.

I stedet for at opskrive en parameterfremstilling som en ligning med vektorer, kan man opskrive forskrifter for hvert koordinat som funktion af t.

$$x(t) = x_0 + t \cdot r_1$$

$$y(t) = y_0 + t \cdot r_2$$



1.10.1 Kender punkt og retning

Hvis man kender et punkt på linjen og en retningsvektor, så kan man opskrive parameterfremstilling ved simpelthen at sætte ind i formlen ovenfor.
Hvis

$$P_0 = (1, 4) \text{ og } \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

så er parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Eller hvis man skriver det som koordinatfunktioner

$$x(t) = 1 + 2t$$

$$y(t) = 4 + 3t$$

1.10.2 Kender to punkter

Hvis man kender to punkter på linjen, kan man opskrive parameterfremstillingen ved først at finde vektoren mellem punkterne. Denne må have samme retning som linjen. Dernæst kan man bruge et af punkterne som sit faste punkt, og vupti, så har man en parameterfremstilling.
Hvis vi kender

$$A = (1, 2) \text{ og } B = (4, 3)$$

så kan vi finde

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og så skal vi bare vælge os et fast punkt. Det kunne f.eks. være A (men B havde virket lige så godt!).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.10.3 Kender linjens ligning

Hvis man kender en ligning for linjen, kan man også omskrive til en parameterfremstilling.
I linjens ligning kan man aflæse en normalvektor. Denne står vinkelret på
linjen. Hvis man hatter normalvektoren får man en vektor, der er parallel med linjen. Den kan man bruge som retningsvektor.
Man kan finde et punkt på linjen ved at sætte en bestemt værdi ind på den ene variables plads og så isolere den anden.
Vores linje har ligningen

$$2x + 5y + 1 = 0$$

Vi aflæser en normalvektor til linjen til at være:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Så må retningsvektoren være:

$$\overrightarrow{r} = \hat{\overrightarrow{n}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nu skal vi finde et punkt på linjen. Vi sætter x=0 og ser hvilken y-værdi der passer til (vi kunne have sat x lig med hvad som helst, men det er tit lettere at regne på udtryk, hvor 0 indgår)

$$2 \cdot 0 + 5y + 1 = 0$$

$$5y = -1$$

$$y = \frac{-1}{5} = -0,2$$

Så vores punkt er (0, -0,2)
Parameterfremstillingen er altså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

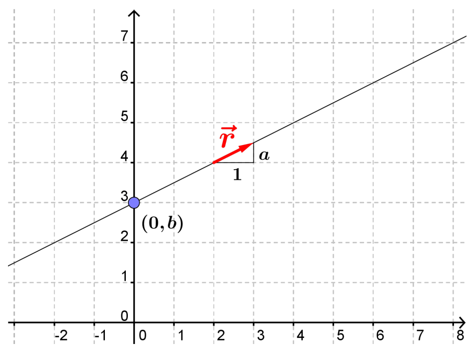
eller skrevet som koordinatfunktioner

$$x(t) = -5t$$

$$y(t) = -0,2 + 2t$$

Hvis man i stedet havde kendt ligningen på formen y=ax+b, havde det været lettere. Der kunne vi som fast punkt bruge (0, b) og som retningsvektor bruge

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$



1.11 Dist-formlen

Ligesom på B-niveau, hvor vi fandt afstande mellem punkter og linjer findes der en tilsvarende måde, når vi har givet linjens ligning på formen ax+by+c=0. Den er således:

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

hvor P har koordinaterne (x_1, y_1) og linjen har ligningen ax+by+c=0.
Hvis vi f.eks. vil finde den korteste afstand mellem

$$P = (1, 2) \text{ og } l : 3x + 4y - 7 = 0$$

så indsætter vi i dist-formlen

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|4|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{4}{5} = 0,8$$

Denne formel er uundværlig, når vi skal finde ud af om cirkler og linjer skærer hinanden.

1.12 Cirkler og linjers skæringer

1.12.1 Cirkler

En cirkel er en punktmængde, hvorom der gælder, at alle punkter på cirklen har samme afstand til et punkt kaldet cirklens *centrum*. Denne afstand kaldes *radius*. Skrevet med mængdesymboler ser det således ud

$$\mathcal{C}(C,r) = \{P = (x,y) \mid |PC| = r\}$$

Hvis man skulle udtale det, ville det lyde "Cirklen med centrum C og radius r er mængden af punkter P, hvorom der gælder, at afstanden mellem P og C er r".
Bemærk, at centrum ikke er en del af cirklen. Cirklen er udelukkende periferien.
Hvis centrumskoordinaterne er $C(a,b)$ kan vi omregne betingelsen for at $P(x,y)$ ligger på cirklen.

$$r = |PC| \tag{6}$$
$$r = |\overrightarrow{PC}| \tag{7}$$
$$r = |\overrightarrow{CP}| \tag{8}$$
$$r = \left|\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}\right| \tag{9}$$
$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \tag{10}$$
$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2. \tag{11}$$

En cirkel er altså alle punkter (x,y) der opfylder ligningen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

1.12.2 Skæring mellem cirkel og linje givet ved ligning

Hvis vi har oplyst cirklens centrum og radius samt linjens ligning, kan vi finde ud af, om der er nogen skæringer mellem cirklen og ligningen. Vi bruger simpelthen dist-formlen til at finde den korteste afstand mellem linjen og cirklens centrum. Hvis afstanden er større end radius, er der ingen skæringer, hvis afstanden er lig med radius, er der et røringspunkt (linjen er i så fald tangent til cirklen), hvis afstanden er mindre end radius, er der to skæringspunkter.
Hvis vi blev spurgt, hvor mange skæringer der var mellem

$$\mathcal{C} : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 16 \text{ og } l : 4x - 5y + 6 = 0$$

så ville vi starte med at aflæse radius til $r = 4$ og centrumkoordinaterne til $C = (-2,3)$. Man skal holde tungen lige i munden med fortegnene til koordinaterne! Nu sætter vi ind i dist-formlen

$$\text{dist}(C,l) = \frac{|4\cdot(-2) - 5\cdot 3 + 6|}{\sqrt{4^2+5^2}} = \frac{|-17|}{\sqrt{16+25}} = \frac{17}{\sqrt{41}} \approx 2,65 < 4$$

Da afstanden er mindre end radius, er der to skæringer mellem cirklen og linjen.

1.12.3 Skæringer mellem cirkel og linje givet ved parameterfremstilling

Hvis en linje er givet ved parameterfremstilling, kan vi ikke bruge dist-formlen til at bestemme antallet af skæringspunkter. I stedet kan vi indsætte parameterfremstillingen i cirklens ligning og dermed finde ud af for hvilke t (hvis nogen overhovedet) der er skæringer.
Det er lettest at gennemgå ved hjælp af et eksempel.
Vores cirkel er givet ved

$$\mathcal{C} : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$$

og vores linje er givet ved

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi starter med at skrive parameterfremstillingen om til koordinatfunktioner

$$x(t) = -5 + 3ty(t) = 1 + t$$

Disse sætter vi så ind på hhv. x's og y's plads i cirklens ligning

$$(\underbrace{-5+3t}_{x}+2)^2 + (\underbrace{1+t}_{y}-3)^2 = 9 \quad (12)$$
$$(3t-3)^2 + (t-2)^2 = 9 \quad (13)$$
$$(9t^2 + 9 - 18t) + (t^2 + 4 - 4t) = 9 \quad (14)$$
$$10t^2 - 22t + 13 = 9 \quad (15)$$
$$10t^2 - 22t + 4 = 0. \quad (16)$$

Nu står vi med en andensgradsligning, hvor t er den ubekendte.
Vi starter med at finde diskriminanten. Hvis den er positiv er der to skæringer, hvis den er 0 er der et røringspunkt og hvis den er negativ skærer cirklen og linjen ikke hinanden.

$$d = (-22)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 4 = 324$$

Der er altså to skæringspunkter.
Nu kan vi finde ud af for hvilke t-værdier skæringerne finder sted.

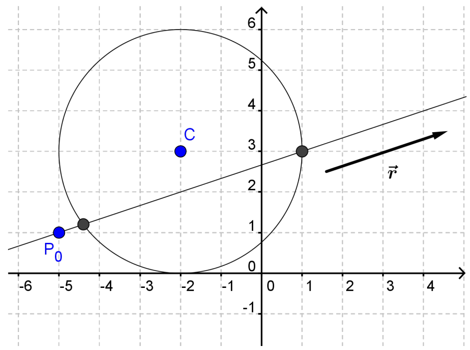
$$t = \frac{22 \pm \sqrt{324}}{2 \cdot 10} = \frac{22 \pm 18}{20} = \begin{cases} \frac{40}{20} = 2 \\ \\ \frac{4}{20} = 0{,}2 \end{cases}$$

Nu indsætter vi disse t-værdier i linjens parameterfremstilling for at finde skæringspunkternes koordinater.

$$t = 2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 2 \cdot 3 \\ 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$t = 0{,}2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 0{,}2 \cdot 3 \\ 1 + 0{,}2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}4 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}$$

Cirkel og ligning skærer altså hinanden i $(1, 3)$ og $(-4{,}4, 1{,}2)$.



1.13 Tangentligning til en cirkel

Hvis man kender en cirkel, kan det være nyttigt at finde en ligning for tangenten i et givet punkt, P_0, på cirklen.
Tangenten er en ret linje, og man kan (som vi gennemgik i et tidligere afsnit) finde dens ligning ved at kende et punkt på linjen og en normalvektor.
Vi kender jo allerede et punkt på linjen, nemlig P_0. Vi mangler altså bare en normalvektor. Heldigvis ved vi, at vektoren fra centrum til P_0 står vinkelret på tangenten. Derfor kan vi bruge den som normalvektor.

Eksempel Vores cirkel har ligningen

$$\mathcal{C}: \quad (x+2)^2 + (y-1)^2 = 13$$

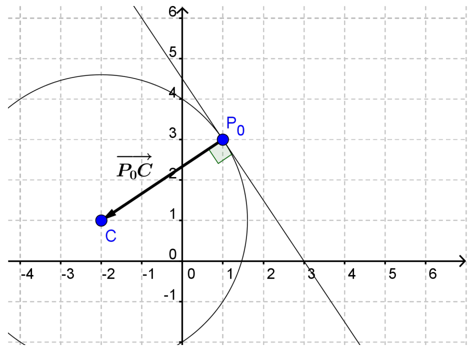
Punktet $P_0 = (1, 3)$ ligger på cirklen. Find en ligning for tangenten til cirklen i P_0. Vi kan aflæse centrumkoordinaterne til $(-2, 1)$ (Vær opmærksom på fortegnene!). Nu finder vi vektoren mellem P_0 og C

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_0C} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Så sætter vi simpelthen bare ind i linjens ligning

$$0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) \Leftrightarrow \quad (17)$$
$$0 = -3(x-1) - 2(y-3) \Leftrightarrow \quad (18)$$
$$0 = (-3x+3) + (-2y+6) \Leftrightarrow \quad (19)$$
$$0 = -3x - 2y + 9 \quad (20)$$

og nu har vi en ligning for tangenten!

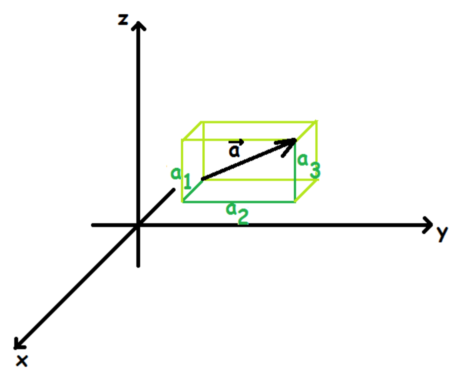


2 Vektorer i 3D

2.1 Koordinatsystemet i 3D

2.2 Vektorer i 3D

Præcis som i 2D er en 3D-vektor en pil med en retning og en længde.
I 3D har en vektor tre koordinater, der svarer til vektorens længde (regnet med fortegn) i hver af de tre aksers retninger. Første koordinaten svarer altså til, hvor langt man går langs x-aksen, andenkoordinaten hvor langt man går langs y-aksen, og tredjekoordinaten langs z-aksen.



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

2.3 Addition, subtraktion og prikprodukt

Man regner med vektorer i 3D på nogenlunde samme måde som i 2D.
Vi definerer således regneoperationerne som

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} t \cdot a_1 \\ t \cdot a_2 \\ t \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Med ord siger vi, at vi lægger to vektorer sammen (eller trækker dem fra hinanden) ved at lægge

sammen (eller trække fra) koordinatvist, og at vi forlænger/forkorter en vektor ved at gange med skaleringsfaktoren på hver koordinat.
Skalarproduktet/prikproduktet i 3D er også defineret på samme måde som i 2D ved at vi ganger sammen koordinatvist og lægger produkterne sammen.

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Der gælder stadig, at to vektorer er ortogonale (vinkelrette på hinanden) hvis deres skalarprodukt er 0.
I videoen herunder kan du se nogle eksempler på udregninger af vektorsummer, -differenser og skalarprodukter i 3D.

2.4 Længde af vektor

Når vi skal beregne længden af en vektor i 3D, bruger vi en formel der minder meget om 2D-formlen

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

2.5 Krydsprodukt

Når man har med 3D-vektorer at gøre, findes der en ny regneart. Den kaldes *krydsproduktet* eller *vektorproduktet*. Man krydser to vektorer med hinanden på følgende måde

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

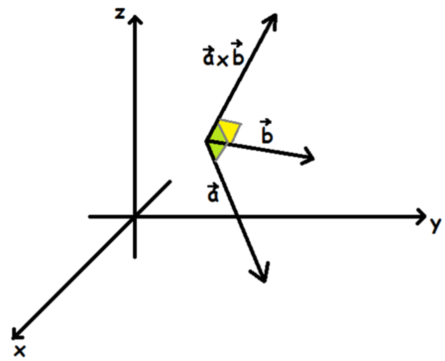
Bemærk, at når man krydser to vektorer med hinanden, så får man en ny vektor.

2.5.1 Egenskaber ved krydsproduktet

Når man finder krydsproduktet af to vektorer, vil krydsproduktsvektoren stå vinkelret på begge de to oprindelige vektorer.

Vi kan tjekke, at det er rigtigt i eksemplet ovenfor ved at prikke hver af vektorerne sammen med krydsproduktsvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-3) = -3 + 12 - 9 = 0$$



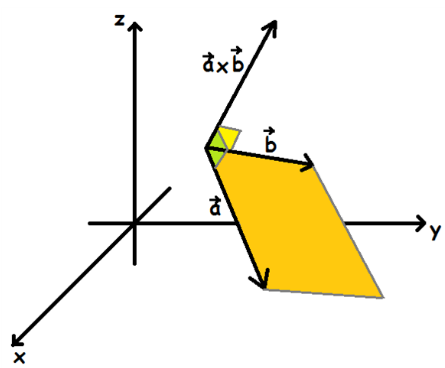
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 6 + 6 \cdot (-3) = -12 + 30 - 18 = 0$$

Da begge prikprodukter giver 0, betyder det at hver af vektorerne er ortogonale med krydsproduktet.

2.5.2 Areal af parallellogram

Udover at stå vinkelret på begge vektorer, så er længden af krydsproduktet lig med arealet af det parallellogram, der udspændes af de to vektorer.

$$A_{parallellogram} = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$$



F.eks. kan arealet af parallelogrammet udspændt af vektorerne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

udregnes som:

$$\left|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2+6^2+(-3)^2} \tag{22}$$

$$= \sqrt{9+36+9} = \sqrt{54} \tag{24}$$

$$\approx 7,35 \tag{26}$$

(21) (23) (25) (27)

2.5.3 Parallelle vektorer

Hvis krydsproduktet af to vektorer giver nulvektoren, betyder det, at de to vektorer er parallelle.

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}\ .$$

Dette skyldes, at længden af krydsproduktet mellem to vektorer kan skrives som

$$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\sin(v)\ ,$$

hvor v er den udspændte vinkel mellem de to vektorer. Da $\sin(0)=\sin(\pi)=0$ betyder det altså, at hvis de to vektorer er enten ensrettede eller modsatrettede parallelle, så er længden af deres krydsprodukt nul. Da længden af krydsproduktet er givet som kvadratroden af en sum af positive størrelser medfører det altså at hvis længden er nul, må krydsproduktet nødvendigvis også være det.

2.6 Linjer i rummet

Når man arbejder med linjer i rummet, bruger man stort set kun deres parameterfremstilling. I princippet kan man også opskrive en ligning for linjer i rummet, men det er en grim formel, som er svær at anvende i praksis.
Parameterfremstillingen for linjen er stort set som i 2D bare med et tredje koordinat på retningsvektoren og det faste punkt.
Et punkt (x, y, z) ligger således på en ret linje, hvis det opfylder ligningen

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{pmatrix}$$

Dette kan også skrives som

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \overrightarrow{r}$$

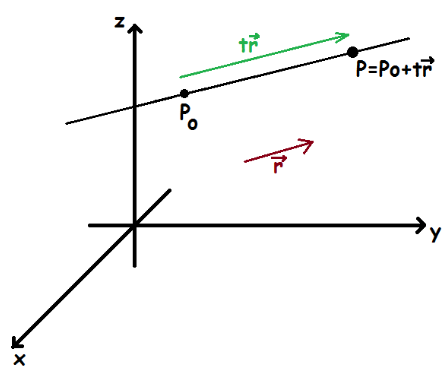
Man kan også skrive parameterfremstillingen som funktioner for hver koordinat:

$$x = x_0 + t \cdot r_1$$

$$y = y_0 + t \cdot r_2$$

$$z = z_0 + t \cdot r_3$$

Parameterfremstillingen for linjer i rummet fungerer på samme måde som i planen. Man starter i et punkt på linjen og derfra kan man nå alle punkter på linjen ved at gå en forlængelse/forkortelse af retningsvektoren ud fra punktet.



2.7 Vindskæve linjer

Hvis man har to linjer i rummet kan de ligge på tre forskellige måder i forhold til hinanden.
De kan

1. være parallelle
2. skære hinanden i et punkt
3. være vindskæve

Lad os se på de tre tilfælde hver for sig.

2.7.1 Parallelle

Man kan undersøge, om to linjer er parallelle ved at se om deres to retningsvektorer er parallelle. Dette kan gøres på to måder. Enten kan man undersøge om den ene er en forlængelse af den anden. F.eks. er

$$\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$$

en forlængelse af

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

fordi man kan skrive

$$\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Den anden metode til at tjekke for parallelitet er ved at undersøge om krydsproduktet giver 0. Hvis de to retningsvektorer betegnes med r og q gælder nemlig:

$$\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}q_1\\q_2\\q_3\end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{r} \parallel \vec{q}$$

Hvis linjerne er parallelle har de enten 0 skæringspunkter eller uendeligt mange skæringspunkter (dette sker, hvis de to linjer er ens)

2.7.2 Ét skæringspunkt

Hvis linjerne ikke er parallelle, kan man undersøge, om de skærer hinanden i ét punkt. Det gør man ved først at sætte ligningerne for de to x- og y-koordinater lig hinanden. Det vil give to ligninger med to ubekendte (de to parametre), som vi kan løse.
Når vi så har fundet løsningerne, så sætter vi parametrene ind i ligningerne for z-koordinaterne og ser, om vi får samme z-koordinat. Hvis dette er tilfældet, har vi fundet et skæringspunkt. Og hvis vi ikke får samme z-koordinat, så skærer de to linjer ikke hinanden.
Vi prøver med et eksempel. Vores linjer l og m er givet ved

$$l: \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$m: \quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$$

Vi kan skrive ligningerne for x- og y-koordinaterne således:

$$x_l = 1 + 3t$$
$$y_l = 2 + 1 \cdot t$$
$$x_m = 5 + 2s$$
$$y_m = 1 + 4s$$

Vi sætter x-værdierne lig hinanden og y-værdierne lig hinanden

$$1 + 3t = 5 + 2s$$
$$2 + t = 1 + 4s$$

Vi løser de to ligninger med to ubekendte og når frem til

$$s = 0,7 \quad \text{og} \quad t = 1,8$$

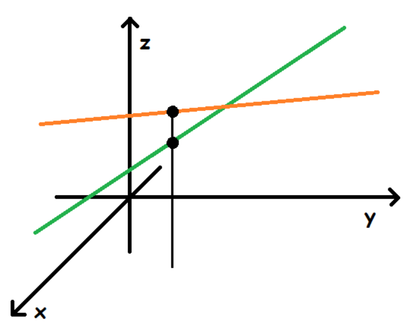
Nu skal vi indsætte disse s- og t-værdier i ligningerne for z-værdierne.

$$z_l = 4 + 2t = 4 + 2 \cdot 1,8 = 7,6$$
$$z_m = 3 + 2s = 3 + 2 \cdot 0,7 = 4,4$$

Da vi får to forskellige z-værdier, betyder det, at de to linjer ikke skærer hinanden.

2.7.3 Vindskæve linjer

Hvis to linjer hverken er parallelle eller skærer hinanden, så kaldes de ”vindskæve”. På billedet herunder har vi forsøgt at afbilde to vindskæve linjer. Deres retningsvektorer er ikke parallelle, og i det punkt, hvor de har samme x- og y-værdier (de to sorte punkter), er deres z-værdier forskellige.

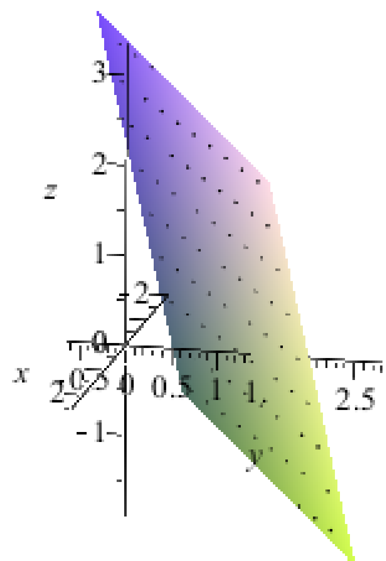


Det ligner, de skærer hinanden et sted, men det er fordi, det er svært at tegne tredimensionelt i to dimensioner. I det tilsyneladende skæringspunkt er den grønne linje ”længere inde i skærmen”, mens den orange er tættere på os.
Man kan forestille sig to vindskæve linjer som en bil, der kører ad en lige vej nede på jorden (den ene linje) og et fly, der flyver ligeud oppe i luften (den anden linje).

Selvom flyet krydser henover vejen, så vil bilen og flyet ikke støde sammen, da flyet befinder sig flere km over vejen.

2.8 Planer

En plan er en to-dimensional størrelse i et tredimensionelt rum. Man kan forestille sig en plan som et stykke papir, der befinder sig i et tredimensionelt rum, og som breder sig uendeligt ud. Ligesom du kan hæve eller sænke et stykke papir eller rotere det, således at det vender på alle mulige skæve måder, så kan du også gøre det med en plan.
Nedenfor er tegnet en plan.



2.8.1 Normalvektor

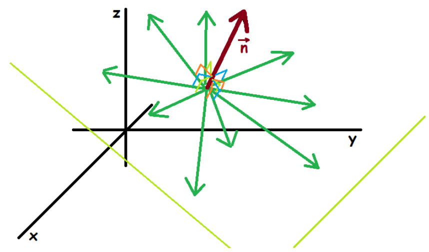
Ligesom vi i 2D snakkede om at linjer havde normalvektorer, snakker vi i 3D om at planer har normalvektorer. Man kan faktisk definere en plan som alle de vektorer, der står vinkelret på en (normal)vektor.
Herunder har vi tegnet en rød vektor og 9 grønne vektorer, der alle står vinkelret på den. Det ses, at de grønne vektorer ligger i den samme plan.

Man betegner tit planer med græske bogstaver såsom α og β

2.9 Planens ligning

Man kan beskrive en plan ved hjælp af en ligning. Planens ligning er

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$



Her er (x_0, y_0, z_0) et punkt i planen og

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

er en normalvektor til planen.
Man kan også skrive ligningen om til

$$ax + by + cz + d = 0$$

hvor man har ganget parenteserne ud og samlet alle konstanterne i én, nemlig d.
At planen har denne ligning, betyder, at planen består af alle de punkter (x,y,z), der opfylder ligningen. Dvs. alle de punkter (x,y,z), der gør, at der står det samme på venstre og højre side af lighedstegnet.
Man kan afgøre om et punkt ligger i en plan ved at indsætte dets koordinater i ligningen, og se om man får 0 ud af det. F.eks. kunne man ønske at finde ud af om (2, 4, 5) ligger i planen med ligningen 3x+5y-2z+7=0.
Vi sætter ind

$$3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 - 2 \cdot 5 + 7 = 6 + 20 - 10 + 7 = 23 \neq 0$$

Da punktet ikke opfylder ligningen, ligger det ikke i planen.

2.9.1 Finde ligningen for planen, hvis man kender to vektorer

Hvis man tegner to ikke-parallelle vektorer (fra samme begyndelsespunkt), vil de udspænde en plan. Det vil sige, at man kan finde én (og kun én) plan, som de begge to ligger i. Det er let at opskrive en ligning for den plan. Alt vi skal kende er et punkt i planen og en normalvektor til planen. Som punkt kan vi bruge begyndelsespunktet for vektorerne. Som normalvektor kan vi bruge krydsproduktet af de to vektorer, fordi krydsproduktet står vinkelret på begge vektorer.

2.10 Planens parameterfremstilling

Ligesom linjen har en parameterfremstilling, så kan man også lave en parameterfremstilling for planen. Det kræver, at man kender ét punkt i planen og to ikke-parallelle vektorer, der ligger i planen.

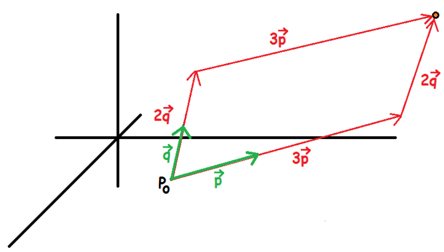
Parameterfremstillingen for planen ser således ud:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

eller skrevet kortere

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + s \cdot \overrightarrow{p} + t \cdot \overrightarrow{q}$$

Vektorerne p og q kaldes retningsvektorer for planen.
Planens parameterfremstilling fungerer på den måde, at man kan nå ud til alle punkter i planen ved at starte i P_0 og derfra gå først et stykke parallelt med den ene vektor og dernæst et stykke parallelt med den anden. Nedenfor er tegnet, hvor man går 3 af den ene vektor og 2 af den anden ud fra punktet for at nå frem til det orange punkt.



Ved at sætte forskellige tal ind på s's og t's plads kan man nå ud til alle punkter i planen.

2.10.1 Finde ligning når man kender parameterfremstilling

Hvis man kender parameterfremstillingen for en plan, kan man let finde dens ligning. Man finder normalvektoren ved at krydse de to retningsvektorer med hinanden

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}$$

og man kender allerede et punkt i planen. Så kender man alt, hvad man har brug for for at kunne opskrive en ligning for planen

2.10.2 Finde parameterfremstilling, hvis man kender ligning

Hvis man kender ligningen for en plan, kan man gå den anden vej og finde en parameterfremstilling for planen.
Vi illustrerer metoden med et eksempel.

$$\alpha : \quad 2x + 4y - 6z - 1 = 0$$

Først isolerer man den ene variable. Man bestemmer selv hvilken. Vi vælger at isolere x.

$$x = \frac{1}{2} - 2y + 3z$$

Nu lader man de to andre variable være parametrene. Vi sætter y=s og z=t.
Dermed har vi de tre ligninger

$$x = \frac{1}{2} - 2s + 3t$$
$$y = s$$
$$z = t$$

Vi kan også skrive det som

$$x = \frac{1}{2} - 2 \cdot s + 3 \cdot t$$
$$y = 0 + 1 \cdot s + 0 \cdot t$$
$$z = 0 + 0 \cdot s + 1 \cdot t$$

og dette kan på vektorform skrives som

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hvorved vi er nået frem til en parameterfremstilling for planen.

2.11 Vinkel mellem linje og plan

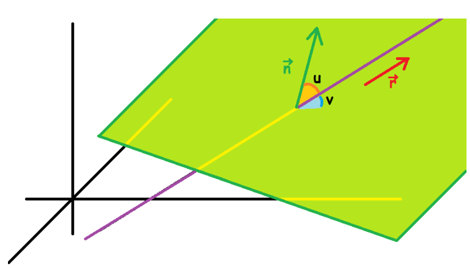
Hvis man har en linje og en plan, vil de skære hinanden i et punkt (medmindre de er parallelle), og der vil dannes en vinkel imellem dem.
Denne vinkel kan vi beregne.
Først finder man vinklen mellem planens normalvektor og linjens retningsvektor.
Dette gør man med den formel, vi kender fra 2D

$$\cos(u) = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{r}}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{r}|}$$

Hvis vi trækker denne vinkel fra 90° får vi vinklen mellem linjen og planen

$$v = 90° - u$$

Det kan illustreres med følgende tegning



2.12 Vinkel mellem to planer

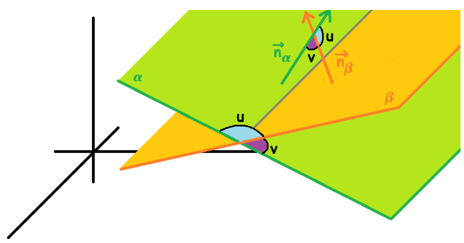
Hvis man har to planer α og β, kan man beregne vinklen mellem dem.
Man starter med at finde vinklen mellem de to planers normalvektorer.
Dette gør man med den formel, vi kender fra 2D.

$$\cos(v) = \frac{\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}}{|\overrightarrow{n_\alpha}| \cdot |\overrightarrow{n_\beta}|}$$

Når vi så har fundet vinklen mellem normalvektorerne, så trækker vi den fra 180° for at få vinklen mellem planerne.

$$u = 180^\circ - v$$

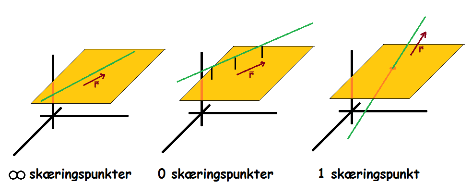
Man kan illustrere det ved hjælp af følgende tegning.



Man kan let se, at u og v tilsammen er 180°. Når man finder vinklen mellem normalvektorerne, er det v man finder.
Trækker man v fra 180, får man u, som er vinklen mellem planerne.

2.13 Skæring mellem linje og plan

Når man skal se, hvordan linjer og planer forholder sig i forhold til hinanden, er der tre muligheder.
• Hvis linjen ligger i planen (dvs. at både retningsvektoren og det faste punkt ligger i planen), er der uendeligt mange skæringspunkter.
• Hvis linjens retningsvektor ligger i planen, men det faste punkt ikke gør, så er der *ingen* skæringer.
• Hvis linjens retningsvektor ikke ligger i planen, er der ét skæringspunkt.



Man kan undersøge om retningsvektoren ligger i planen ved at prikke den med planens normalvektor. Hvis prikproduktet giver 0, er de to vektorer ortogonale og det vil sige, at retningsvektoren

ligger i planen (hvis planen er givet ved en parameterfremstilling og ikke en ligning, kan man finde normalvektoren ved at krydse planens to retningsvektorer med hinanden)
Hvis retningsvektoren ligger i planen, kan man undersøge om linjens faste punkt også ligger i planen. Det gør man ved at indsætte punktet i planens ligning og se, om den er opfyldt. (Hvis planen er givet ved en parameterfremstilling, sætter man punktet ind på venstre side og bruger to af de tre ligninger til at isolere s og t. Dernæst indsætter man s- og t-værdierne i den tredje for at undersøge om den er opfyldt).
Hvis retningsvektoren ikke ligger i planen, kan man beregne skæringspunktets koordinater.

2.13.1 Find skæring, når plan er givet ved ligning

Hvis planen er givet ved en ligning og linjen ved parameterfremstilling, så finder man skæringen mellem dem på følgende måde:
Først indsætter man hver enkelt koordinatfunktion fra linjen i planens ligning. Dernæst isolerer man t. Den fundne t-værdi indsættes slutteligt i linjens parameterfremstilling, og det punkt, man når frem til er skæringspunktet.
Lad os tage et eksempel:

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha: \quad 2x + 3y - z + 4 = 0$$

Vi kan skrive linjens parameterfremstilling om til de tre koordinatfunktioner

$$x = 1 + 2t$$

$$y = 5 - 2t$$

$$z = 0 + t = t$$

Disse funktioner sætter vi så ind på x's, y's og z's pladser i planens ligning

$$2(1 + 2t) + 3(5 - 2t) - (0 + t) + 4 = 0$$

$$2 + 4t + 15 - 6t - t + 4 = 0$$

$$-3t + 21 = 0$$

$$t = \frac{21}{3} = 7$$

Vi har altså fundet ud af, at linje og plan skærer hinanden, når t=7. Nu mangler vi bare at indsætte t=7 i linjens parameterfremstilling for at finde frem til skæringspunktet

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 7 \cdot 2 \\ 5 - 7 \cdot 2 \\ 0 + 7 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Skæringspunktet er derfor (15, -9, 7)

2.13.2 Find skæring, når plan er givet ved parameterfremstilling

Hvis planen er givet ved en parameterfremstilling, kan man enten omskrive parameterfremstilingen til en ligning og gøre som ovenfor, eller man kan løse tre ligninger med tre ubekendte.
Lad os tage et eksempel

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} x = 2u \\ y = -u \\ z = 1 + u \end{array}$$

$$\alpha: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} x = 1 + s + 3t \\ y = 1 + 2s\ (+0 \cdot t) \\ z = 2 + t\ (+0 \cdot s) \end{array}$$

Bemærk, at vi har givet alle parametrene forskellige navne, således at linjens parameter hedder u, mens planens hedder s og t.
Nu sætter vi ligningerne for x lig hinanden, ligningerne for y lig hinanden og ligningerne for z lig hinanden.

$$2u = 1 + s + 3t$$

$$-u = 1 + 2s$$

$$1 + u = 2 + t$$

Vi starter med at isolere en af parametrene i en af ligningerne. Lad os isolere u i den tredje ligning

$$u = 2 + t - 1 = 1 + t$$

Dette sætter vi nu ind på u's plads i de andre ligninger

$$2(1 + t) = 1 + s + 3t$$

$$-(1 + t) = 1 + 2s$$

Nu står vi med to ligninger med to ubekendte. Vi isolerer s i den øverste

$$s = 2(1 + t) - 1 - 3t = 2 + 2t - 1 - 3t = 1 - t$$

Dette sætter vi nu ind på s's plads i den anden ligning

$$-(1 + t) = 1 + 2(1 - t)$$

$$-1 - t = 1 + 2 - 2t$$

$$-t + 2t = 1 + 2 + 1$$

$$t = 4$$

Nu ved vi at t=4, og vi kan indsætte dette i udtrykkene for u og s

$$u = 1 + t = 1 + 4 = 5$$

$$s = 1 - t = 1 - 4 = -3$$

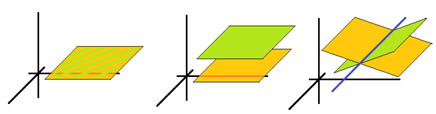
Nu indsætter vi enten u-værdien i linjens parameterfremstilling eller s- og t-værdierne i planens parameterfremstilling. Lige meget i hvilken vi indsætter, når vi frem til skæringspunktet. Vi indsætter u=5 i linjens parameterfremstilling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 5 \cdot 2 \\ 0 + 5 \cdot (-1) \\ 1 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Altså skærer linjen planen i punktet (10, -5, 6).

2.14 Skæring mellem planer

Hvis man har to planer, kan de ligge på tre forskellige måder i forhold til hinanden.
• Hvis de to planer er ens (deres normalvektorer er parallelle, og de har et fælles punkt), så skærer de hinanden over hele planen.
• Hvis de to planer er parallelle (deres normalvektorer er parallelle, men de har ingen fælles punkter), så skærer de to planer ikke hinanden.
• Hvis de to planers normalvektorer ikke er parallelle, vil planerne skære hinanden i en linje.



Man starter med at undersøge om planerne er parallelle. Det gør man ved at undersøge om deres normalvektorer er parallelle. Man krydser de to normalvektorer med hinanden. Hvis krydsproduktet giver nulvektoren, er de parallelle. (Hvis den ene (eller begge) planer er givet ved parameterfremstilling, finder man planens normalvektor ved at krydse dens to retningsvektorer med hinanden).
Hvis planerne er parallelle, undersøger man om de er sammenfaldende eller ej. Man undersøger om det faste punkt fra den ene plan ligger i den anden ved at indsætte i dens ligning. (Hvis en eller begge planer er givet ved parameterfremstilling kan man tage det faste punkt fra den ene og indsætte på venstresiden af den anden. Så løser man to af ligningerne med to ubekendte. De fundne parameterværdier indsættes så i den tredje ligning. Hvis den er opfyldt, ligger punktet i begge planer).
Hvis planerne ikke er parallelle, skærer de hinanden i en linje. Vi beviser først, at krydsproduktet af de to planers normalvektorer udgør en retningsvektor for skæringslinjen.

2.14.1 Begge planer er givet ved ligninger

Hvis begge planer er givet ved ligninger, finder man skæringslinjen ved følgende fremgangsmåde. Først krydser man de to normalvektorer med hinanden. Deres krydsprodukt er retningsvektoren for skæringslinjen. Dernæst skal man finde et punkt på linjen. Det gør man ved at sætte et fast tal ind i stedet for en af de variable (typisk z=0) og løse de to ligninger med to ubekendte. Derved vil man opnå et punkt der ligger på skæringslinjen.

Nu kan man sammensætte det i en parameterfremstilling
Lad os illustrere med et eksempel.

$$\alpha : \quad x - 3y + z - 1 = 0$$

$$\beta : \quad 2x - 5y - 2z + 4 = 0$$

Vi aflæser normalvektorerne ud fra ligningerne

$$\overrightarrow{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{n}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Skæringslinjens retningsvektor er krydsproduktet af de to normalvektorer

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{n}_\alpha \times \overrightarrow{n}_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nu sætter vi z=0 i de to ligninger

$$x - 3y + 0 - 1 = 0$$

$$2x - 5y - 2 \cdot 0 + 4 = 0$$

Vi løser de to ligninger med to ubekendte ved substitutionsmetoden

$$x - 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3y + 1$$

$$2(3y + 1) - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow 6y + 2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = -6$$

$$x = 3 \cdot (-6) + 1 = -18 + 1 = -17$$

Nu har vi punktet (-17, -6, 0) som ligger på skæringslinjen. Skæringslinjen har derfor parameterfremstillingen

$$l : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.14.2 En plan er givet ved ligningen, den anden ved parameterfremstilling

Hvis den ene plan er givet ved ligning og den anden ved parameterfremstilling, så finder man skæringslinjen på følgende måde.
Først indsætter man hver enkelt koordinatfunktion fra parameterfremstillingen i den anden plans ligning. Dernæst isolerer man den ene parameter. Dette indsætter man så igen i parameterfremstillingen, hvorved man kan reducere til linjens parameterfremstilling.
Lad os se på et eksempel:

$$\alpha: \quad 2x - y + 3z = 0$$

$$\beta: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vi kan omskrive parameterfremstillingen til de tre koordinatfunktioner

$$x = 1 + 2s - t$$

$$y = 1 + 3t$$

$$z = s + 2t$$

Disse indsætter vi nu i ligningen og isolerer den ene parameter

$$2(1 + 2s - t) - (1 + 3t) + 3(s + 2t) = 0$$

$$2 + 4s - 2t - 1 - 3t + 3s + 6t = 0$$

$$1 + 7s + t = 0$$

$$t = -1 - 7s$$

Nu indsætter vi dette på t's plads i de tre koordinatfunktioner

$$x = 1 + 2s - (-1 - 7s) = 1 + 2s + 1 + 7s = 2 + 9s$$

$$y = 1 + 3(-1 - 7s) = 1 - 3 - 21s = -2 - 21s$$

$$z = s + 2(-1 - 7s) = s - 2 - 14s = -2 - 13s$$

Vi kan nu skrive det om til en parameterfremstilling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -21 \\ -13 \end{pmatrix}$$

2.14.3 Begge planer er givet ved parameterfremstillinger

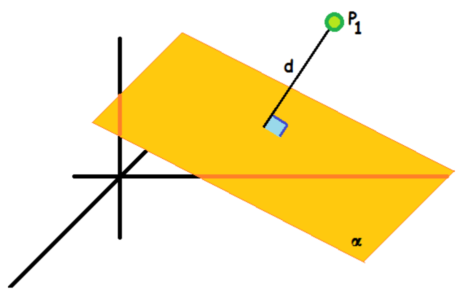
Hvis begge planer er givet ved parameterfremstillinger vil vi anbefale, at man omskriver den ene til en ligning (man kender allerede et fast punkt, og som normalvektor kan man bruge krydsproduktet af de to retningsvektorer. Læs evt. mere her). Nu har man den ene plan som ligning og den anden som parameterfremstilling, og man kan således bruge metoden ovenfor.
Der findes også en metode, hvor man ikke behøver omskrive til ligning, men den er relativt indviklet, så den vil vi forbigå her.

2.15 Afstand mellem punkt og plan

Hvis man har oplyst et punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ og en plan α: ax+by+cz+d=0, så er afstanden mellem dem givet ved formlen

$$\text{dist}(\alpha, P_1) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Den afstand, man måler, er den vinkelrette afstand mellem punktet og planen.



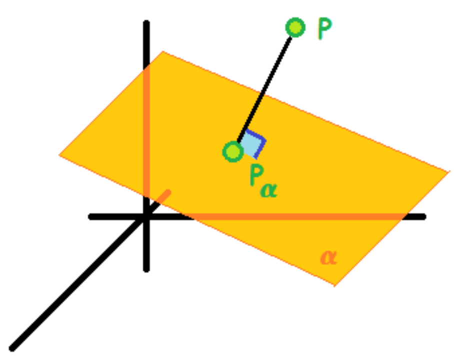
Læg mærke til, hvordan formlen minder om afstanden mellem en linje og et punkt i 2D.

2.15.1 Hvad hvis planen er givet ved parameterfremstilling?

Hvis planen er givet ved parameterfremstilling, omregner man den til en ligning.
Man kender allerede et fast punkt, og man kan udregne en normalvektor ved at krydse de to retningsvektorer med hinanden.
Når man har omregnet planen fra parameterfremstilling til ligning, kan man bruge formlen ovenfor.

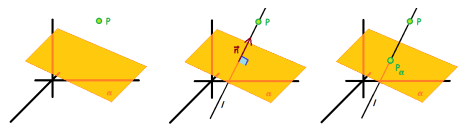
2.16 Projektion af punkt på plan

Hvis man har et punkt og en plan, kan man ønske at projicere punktet ned på planen. Projektionen svarer til det punkt i planen, man rammer, hvis man bevæger sig vinkelret fra punktet ind mod planen.



2.16.1 Hvordan finder man projektionen

Når man ønsker at finde koordinatsættet for projektionen af et punkt på en plan, gør man det i flere trin.
Først konstruerer man en linje, der står vinkelret på planen og som går gennem punktet.
Dernæst finder man skæringspunktet mellem planen og linjen. Skæringspunktet er projektionen.



Det er let at konstruere en linje gennem punktet som står vinkelret på planen. Man bruger planens normalvektor som retningsvektor for linjen (så sikrer man sig at linjen er vinkelret på planen) og man bruger punktet som det faste punkt på linjen.
Skæringspunktet mellem linjen og planen finder man på den måde, der er beskrevet i afsnittet om skæringer mellem linjer og planer.
Lad os se på et eksempel.

$$\alpha:\ 3x - y + 4z + 26 = 0P(1,2,3)$$

Vi ønsker at projicere P ind på α. Vi aflæser koordinaterne for planens normalvektor ud fra dens ligning

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Denne bruger vi som retningsvektor for linjen, l, gennem P og vinkelret på α.
Vi kan altså skrive linjens parameterfremstilling op således:

$$l:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Man kan også skrive parameterfremstillingen op som de tre koordinatfunktioner

$$x = 1 + 3t$$

$$y = 2 - t$$

$$z = 3 + 4t$$

Nu skal vi finde skæringspunktet mellem linjen og planen. Det gør vi ved at sætte koordinatfunktionerne ind i planens ligning

$$3(1 + 3t) - (2 - t) + 4(3 + 4t) + 26 = 0$$

$$3 + 9t - 2 + t + 12 + 16t + 26 = 0$$

$$26t + 39 = 0$$

$$t = \frac{-39}{26} = -1,5$$

Nu har vi fundet ud af, at skæringspunktet findes, når t= -1,5.
Vi indsætter denne t-værdi i linjens parameterfremstilling for at se, hvilket punkt, det svarer til.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1,5) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 1,5 \cdot 3 \\ 2 - 1,5 \cdot (-1) \\ 3 - 1,5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 4,5 \\ 2 + 1,5 \\ 3 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,5 \\ 3,5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Altså er projektionen af punktet på planen

$$P_\alpha = (-3.5,\ 3.5,\ -3)$$

2.17 Kuglen

Ligesom man i 2D arbejdede med cirkler, arbejder man i 3D med kugler. Når man siger, at et punkt ligger på en kugle, betyder det, at punktet ligger på kugleskallen (og altså ikke indeni kuglen).
Kuglens ligning er givet ved

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

hvor (a, b, c) er kuglens centrum, og r er kuglens radius.
Man kan aflæse kuglens centrum og radius ud fra ligningen.
For eksempel har kuglen med denne ligning

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 64$$

radius 8 og centrum i punktet (2, -3, 1) (vær opmærksom på fortegnene!).

2.17.1 Omskrive kuglens ligning

Det er ikke altid, man får kuglens ligning givet på formen ovenfor. Nogle gange er parenteserne ganget ud (ved hjælp af kvadratsætningerne). I det tilfælde kan man ikke direkte aflæse centrum og radius.
I dette afsnit skal vi se, hvordan man omformer tilbage til standardformen, så man kan aflæse centrum og radius direkte. Metoden man bruger, kaldes kvadratkomplettering, og vi har tidligere brugt den til at løse andengradsligninger.
Lad os illustrere metoden med et eksempel.
Vores kugle er givet ved

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y + 4z = 2$$

Det først vi gør er at rykke rundt, så vi samler hhv x'erne, y'erne og z'erne

$$x^2 + 6x + y^2 - 2y + z^2 + 4z = 2$$

Nu er tricket at samle leddene med x'erne vha. en kvadratsætning. Vi kan se, at det ene tal i parentesen må være x. Vi betragter 6x som det dobbelte produkt (2*3*x). Derfor må det andet tal i parentesen være 3. Før vi kan samle det, kræver det dog, at vi lægger 3^2 til på begge sider.

$$x^2 + 3^2 + 6x + y^2 - 2y + z^2 + 4z = 2 + 3^2$$

Nu kan vi samle de første tre led vha. en kvadratsætning

$$(x+3)^2 + y^2 - 2y + z^2 + 4z = 2 + 3^2$$

Nu gør vi det samme med y-leddene. -2y er det dobbelte produkt (2*(-1)*y). Derfor må tallene i parentesen være y og -1. Derfor lægger vi $(-1)^2$ til på begge sider.

$$(x+3)^2 + y^2 + (-1)^2 - 2y + z^2 + 4z = 2 + 3^2 + (-1)^2$$

Nu samler vi y-leddene ved brug af kvadratsætningerne

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 + z^2 + 4z = 2 + 3^2 + (-1)^2$$

Til sidst gør vi det samme med z-leddene. 4z er det dobbelte produkt (2*2*z). Så tallene i parentesen må være z og 2. Vi lægger 2^2 til på begge sider.

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 + z^2 + 2^2 + 4z = 2 + 3^2 + (-1)^2 + 2^2$$

Nu samler vi ved hjælp af kvadratsætningerne

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2 + 3^2 + (-1)^2 + 2^2$$

Hvis vi regner højresiden ud, står vi med ligningen

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 16$$

Nu har vi omformet til standardformen og kan aflæse kuglens centrum til (-3, 1, -2) og radius til 4.

2.18 Skæring mellem plan og kugle

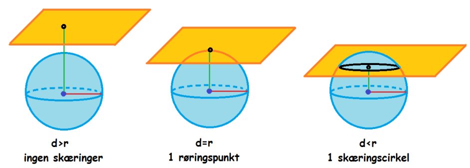
Hvis man har givet en plan og en kugle, kan man være interesseret i at finde ud af, om de to objekter skærer hinanden.
For at afgøre om de skærer hinanden, finder man afstanden mellem kuglens centrum og planen. Dette gøres ved hjælp af formlen for afstand mellem et punkt og en plan.
Man skal holde tungen lige i munden, for man plejer både at kalde kuglens centrum og koefficienterne i planens ligning for a, b og c. For at skelne kalder vi derfor kuglens centrum for

$$C(k_1, k_2, k_3)$$

Vi finder altså afstanden mellem centrum og plan ved formlen

$$\operatorname{dist}(C, \alpha) = \frac{|ak_1 + bk_2 + ck_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

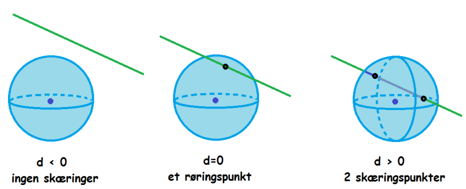
Når man har fundet afstanden, sammenligner man med radius. Der er nu tre muligheder



Hvis der kun er et røringspunkt, er planen en tangentplan til kuglen. Hvis planen og kuglen skærer hinanden, vil det altid være i en cirkel. Der findes en formel for, hvordan man udregner ligningen for skæringscirklen, men den er relativt kompliceret, så den springer vi over her.

2.19 Skæring mellem linje og kugle

Hvis man har en linje og en kugle i rummet, kan man være interesseret i at finde ud af, om de skærer hinanden.
Man finder frem til eventuelle skæringspunkter ved at indsætte koordinatfunktionerne fra linjens parameterfremstilling i kuglens ligning.
Dette vil give en andengradsligning, hvor t er den ubekendte.
Man beregner andengradsligningens diskriminant, og der er tre muligheder



Hvis d $\leqslant 0$, kan man finde frem til skæringspunkterne ved først at løse andengradsligningen, og dernæst indsætte de fundne t-værdier i linjens parameterfremstilling. Dermed vil man finde frem til røringspunkt/skæringspunkter.
Lad os tage et eksempel
Vores kugle har r=4 og C(-1, 2, 0). Dens ligning er

$$\mathcal{K}: \ (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 16$$

Vores linje har parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi skriver hver enkelt koordinatfunktion op

$$x = 1 + t$$

$$y = 1 + 2t$$
$$z = 3 + t$$

Nu sætter vi disse ind i kuglens ligning

$$((1+t)+1)^2 + ((1+2t)-2)^2 + (3+t)^2 = 16$$
$$(t+2)^2 + (2t-1)^2 + (t+3)^2 = 16$$
$$(t^2+4+4t) + (4t^2+1-4t) + (t^2+9+6t) = 16$$
$$6t^2 + 6t + 14 = 16$$
$$6t^2 + 6t - 2 = 0$$

Vi finder diskriminanten for andengradsligningen

$$d = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 36 + 48 = 84$$

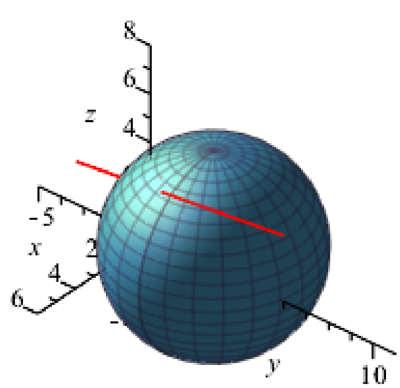
Da diskriminanten er større end 0, er der to skæringer mellem kuglen og linjen.
Vi løser andengradsligningen

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{84}}{2 \cdot 6} \approx \frac{-6 \pm 9,17}{12}$$
$$t_1 \approx 0,26 \qquad t_2 \approx -1,26$$

Ved at indsætte disse t-værdier i linjens parameterfremstilling, når vi frem til skæringspunkterne.

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + 0,26 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1,26\\1,52\\3,26\end{pmatrix} \; \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} - 1,26 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0,26\\-1,52\\1,74\end{pmatrix}$$

Altså har vi, at P_1(1.26, 1.52, 3,26) og P_2(-0.26, -1.52, 1.74) er de to skæringspunkter mellem kuglen og linjen.
Kuglen og linjen fra eksemplet er tegnet her



2.20 Tangentplan til kugle

Ligesom en cirkel i hvert punkt har en tangentlinje, så har en kugle i hvert punkt en tangentplan. En tangentplan er altså en plan, der rører kuglen i ét (og kun ét) punkt.
Man kan forestille sig tangentplanen som et stykke karton, der ligger op ad en fodbold.
I opgaver bliver man tit bedt om at bestemme en ligning for tangentplanen i et kendt punkt på kuglen.
Vi husker på, at man for at kunne opskrive en ligning for en plan skal kende et fast punkt i planen samt en normalvektor for planen. Som punktet, kan man bruge det punkt, man har fået opgivet, som altså ligger både på kuglen og i tangentplanen (røringspunktet). Så mangler man altså bare en normalvektor. Vektoren, der starter i det kendte punkt på kuglens overflade og slutter i centrum af kuglen vil være vinkelret på tangentplanen. Derfor kan vi bruge den som normalvektor.
Lad os se på et eksempel.
Vores kugle har ligningen

$$\mathcal{K}: \quad (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 9$$

og punktet

$$P(-4, 3, 0)$$

ligger på kugleskallen (man kan tjekke efter, at P rent faktisk ligger på kugleskallen ved at indsætte det i kuglens ligning og se, om den er opfyldt).
Vi ønsker at bestemme en ligning for kuglens tangentplan i punktet P.
Vores faste punkt i planen er P.
Vores normalvektor er vektoren fra P til C.
Vi aflæser fra kuglens ligning, at centrum har koordinaterne C(-2,1,-1).
Nu udregner vi normalvektorens koordinater

$$\vec{n} = \overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} -2-(-4) \\ 1-3 \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Til sidst skal vi bare sætte ind i formlen for planens ligning.

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

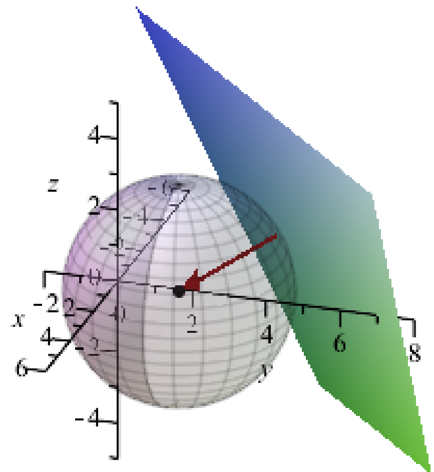
$$2(x-(-4)) + (-2)(y-3) + (-1)(z-0) = 0$$

$$2(x+4) - 2(y-3) - z = 0$$

$$2x + 8 - 2y + 6 - z = 0$$

$$2x - 2y - z + 14 = 0$$

Og dette er så ligningen for tangentplanen til kuglen i punktet P.
Nedenfor er indtegnet kuglen, planen og normalvektoren fra eksemplet ovenfor.

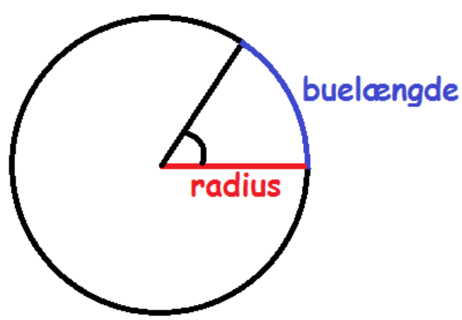


3 Trigonometri

3.1 Radianer

Vi har været vant til at måle vinkler i grader. I dette tilfælde er der 360 grader rundt på en cirkel. I mange tilfælde kan det være nyttigt at måle vinkler i radianer. Skal man f.eks. differentiere de trigonometriske funktioner, kan det kun lade sig gøre, hvis man måler vinklerne i radianer. En vinkels radiantal er defineret som forholdet mellem vinklens buelængde og cirklens radius.

$$\text{vinkel i radianer} = \frac{\text{buelængde}}{\text{radius}}$$

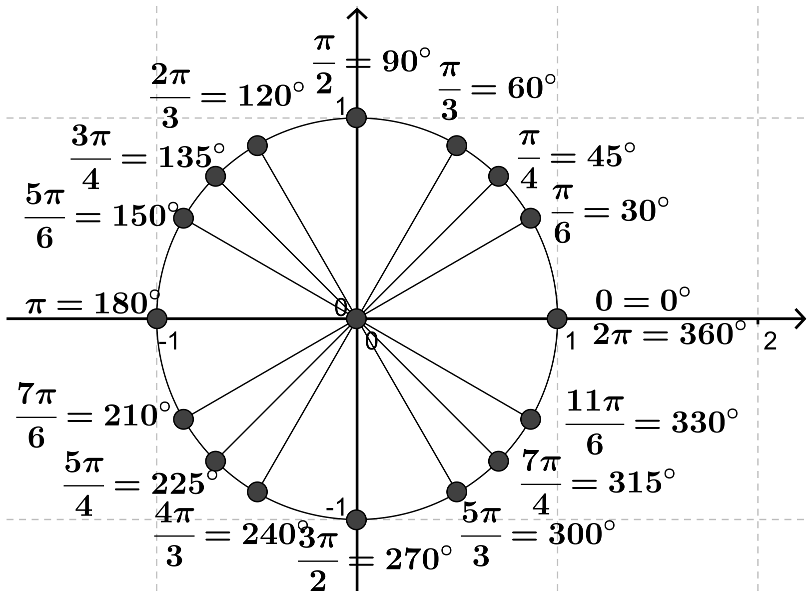


Man kan bruge følgende formler til at omregne fra henholdsvis grader og radianer:

$$x = \frac{v}{360^\circ} \cdot 2\pi$$

$$v = \frac{x}{2\pi} \cdot 360^\circ$$

Her er tegnet en enhedscirkel med de vigtigste vinkler tegnet ind



3.2 Overgangsformler

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \tag{28}$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \tag{29}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \tag{30}$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \tag{31}$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \tag{32}$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \tag{33}$$

$$\sin(-x) = -\sin(x) \tag{34}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \tag{35}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x) \tag{36}$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x) \tag{37}$$

$$\tan(x + 2\pi) = \tan(x) \tag{38}$$

$$\tan(-x) = -\tan(x) \tag{39}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)} \tag{40}$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan(x) \tag{41}$$

$$\tan(\pi + x) = \tan(x) \tag{42}$$

3.3 Additionsformlerne

Før lommeregnerens tid, kunne det være besværligt at udregne værdier for de trigonometriske funktioner.
Et nyttigt redskab til at bestemme sådanne vinkler var additionsformlerne. Hvis man skal finde cosinus eller sinus til en vinkel, kan man splitte vinklen om til en sum af to vinkler, som man kender cosinus- og sinusværdierne for, og bruge dette til at bestemme cosinus- eller sinusværdien for denne vinkel.
Additionsformlerne er

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\ \cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)\\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)\\ \sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)\\ \tan(x+y) &= \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}\\ \tan(x-y) &= \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}\end{aligned}$$

Lad os se, hvordan vi kan anvende dem i praksis
Vi ønsker at beregne

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = ???$$

Vi kan dele det op så

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Nu kan vi bruge den øverste af de fire additionsformler

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Vi ved at

$$\cos(\pi) = -1,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ \sin(\pi) = 0,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

(tjek selv værdierne efter ved at tegne vinklerne ind i enhedscirklen, og aflæs cos- og sinværdierne).
Nu er der bare tilbage at sætte ind

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &= -1\cdot 0 - 0\cdot 1 = 0\end{aligned}$$

Et andet eksempel er, at vi ønsker at beregne

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = ???$$

Vi omskriver til

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

Vi omskriver nu ved hjælp af den fjerde additionsformel

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(\pi)$$

Vi husker at

$$\frac{\pi}{6}\text{ rad} = 30^\circ$$

og derfor ved vi, at

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},\ \cos(\pi) = -1,\ \sin(\pi) = 0$$

Nu er det bare at sætte ind i formlen

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(\pi)$$

$$= 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{1}{2}$$

3.4 Dobbeltvinkelformlerne

Ligesom additionsformlerne er også dobbeltvinkelformlerne brugbare, når man skal regne trigonometriske funktioners værdier ud uden brug af lommeregner.
Faktisk er dobbeltvinkelformlerne et særtilfælde af additionsformlerne, hvor de to vinkler man lægger sammen bare er ens.
Dobbeltvinkelformlerne ser således ud

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Lad os se, hvordan de kan anvendes.
Vi ved at

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Vi ønsker at beregne

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = ???$$

Vi omskriver ved hjælp af dobbelvinkelformlerne

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \tag{43}$$

$$\tag{44}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{45}$$

4 Infinitesimalregning

4.1 Differentiation af sammensat funktion

Vi har tidligere set, hvordan man differentierer simple funktioner, hvordan man differentierer en sum af funktioner, en differens af funktioner samt et produkt eller en kvotient af funktioner. Vi kan dermed næsten differentiere alle differentiable funktioner. Det eneste, vi mangler, er, at kunne differentiere sammensatte funktioner. Når vi har dette værktøj på plads, findes der ikke en eneste differentiabel funktion, som vi ikke kan differentiere.
Reglen til at differentiere en sammensat funktion er

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Med ord, ville det lyde: "man differentierer en sammensat funktion ved at differentiere den ydre funktion med den indre urørt, og gange med den indre funktion differentieret". Reglen kaldes nogle gange for "*kædereglen*".
Lad os lige gennemgå nogle eksempler. Vi ønsker at differentiere

$$h(x) = \sin(3x + 2)$$

h er sammensat af

$$y(x) = \sin(x), \qquad i(x) = 3x + 2$$

Vi starter med at differentiere den ydre funktion.

$$y'(x) = \cos(x)$$

så indsætter vi den indre urørt på x's plads

$$y'(i(x)) = \cos(3x + 2)$$

Dernæst differentierer vi den indre

$$i'(x) = 3$$

og dette skal vi så gange på.
I alt får vi altså:

$$h'(x) = \cos(3x + 2) \cdot 3$$

4.2 Integration ved substitution

En af de vigtigste metoder til integration er integration ved substitution.

4.2.1 Hvornår kan integration ved substitution bruges?

Når integranden (indmaden i integralet) indeholder et *produkt* af funktioner, og når en af dem er *sammensat*. Det er ikke i alle disse tilfælde, det vil virke, men ofte er det et forsøg værd.

4.2.2 Hvad er integration ved substitution?

Integration ved substitution er egentlig følgende formler

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt, \qquad \text{hvor } t = g(x)$$

Formlerne ser meget uoverskuelige ud. Imidlertid er metoden ikke så vanskelig i praksis. Vi illustrerer den ved hjælp af nogle eksempler.
Vi ønsker at udregne følgende integral

$$\int x \cdot e^{x^2}\,dx$$

Vi ser, at der både er tale om et produkt af funktioner, og at den ene er sammensat. Derfor prøver vi os frem med integration ved substitution.
Det første, man gør, er at finde den indre funktion i den sammensatte funktion.
I vores tilfælde er det x^2. Vi kalder den indre funktion for t.

$$t = x^2$$

Nu differentierer vi t:

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

venstresiden er bare et symbol, der betyder, at vi har differentieret t med hensyn til variablen x. Imidlertid lades vi som om, at symbolet er en brøk og isolerer dx.

$$dx = \frac{1}{2x}dt$$

Nu sætter vi t ind i integralet samt det nye udtryk for dx.

$$\int x \cdot e^{x^2}\,dx = \int x \cdot e^t \cdot \frac{1}{2x}\,dt$$

Til sidst skal vi reducere integranden, og udføre integrationen.

$$\int x \cdot e^t \cdot \frac{1}{2x}\,dt = \int \frac{1}{2}e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t + c$$

Som rosinen i pølseenden substituerer vi den indre funktion tilbage ind på t's plads.

$$\int x \cdot e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

4.2.3 Opsamling

- Find den indre funktion og kald den t
- Differentier t, dvs. find dt/dx
- Isolér dx
- Indsæt nu t samt udtrykket for dx i integralet

- Tilbage-substituer den indre funktion på t's plads.

Hvis der er tale om et bestemt integral, skal man huske at integrationsgrænserne også skal substitueres.
Lad os regne følgende eksempel med et bestemt integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^3 \cos(x)\, dx$$

Vi ser, at sin(x) er den indre funktion.

$$t = \sin(x)$$

Vi differentierer t.

$$\frac{dt}{dx} = \cos(x)$$

Vi lades som om symbolet til venstre er en brøk, og isolerer dx.

$$dx = \frac{1}{\cos(x)} dt$$

Nu skal vi finde de nye integrationsgrænser. Det gør vi ved at sætte de gamle grænser ind i den funktion, vi substituerer ud (i vores tilfælde sin(x)).

$$\sin(0) = 0$$

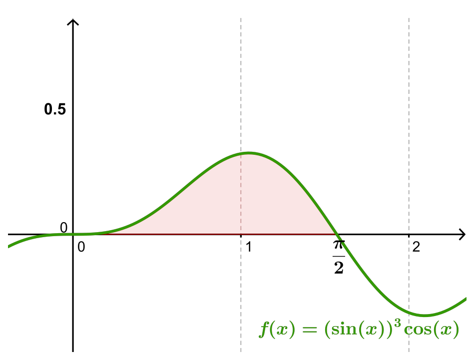
$$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

Nu sætter vi t og udtrykket for dx samt de nye grænser, ind i integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^3 \cdot \cos(x)\, dx = \int_0^1 t^3 \cdot \cos(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}\, dt$$

Vi ser, at cos(x)'erne går ud med hinanden.

$$\int_0^1 t^3 \cdot \cos(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}\, dt = \int_0^1 t^3\, dt = \left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1 = \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{4} \cdot 0^4 = \frac{1}{4}$$



Arealet markeret på figuren er altså $\frac{1}{4}$.

4.3 Differentiation af trigonometriske funktioner

På B-niveau så vi hvordan man differentierede forskellige funktioner. Til den liste kan vi nu tilføje de trigonometriske funktioner sinus, cosinus og tangens.
Husk, at når man differentierer eller integrerer de trigonometriske funktioner, så SKAL man regne i radianer. Hvis du bruger en lommeregner til at differentiere for dig, så sørg for, at den er indstillet til at regne i radianer.
I første søjle har vi funktionerne, i anden søjle har vi de afledede funktioner, altså differentialkvotienterne. I tredje søjle har vi stamfunktionerne.

$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)+c$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)+c$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$	$-\ln(\cos(x))+c$

4.4 Partiel integration

Som nævnt i sidste afsnit er det ikke muligt at komme med en fremgangsmåde til at løse alle integraler. Alligevel har vi nogle værktøjer, nogle metoder, vi kan prøve os frem med for at løse integraler. Partiel (eller *delvis*) integration er en af disse metoder.
Man bruger partiel integration, når integranden (indmaden i integralet) er et produkt af funktioner. Den formel, man bruger, når man integrerer partielt er:

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx$$

Man kan selv vælge, hvilken af de to funktioner, man vil differentiere og hvilken man vil integrere. Dette valg er vigtigt for, om det bliver et pænere eller et grimmere integral, man ender ud med efter den partielle integration.
Et hint er, at hvis der er en funktion af formen x eller x^n, så skal man vælge at differentiere den.
Vi tager et eksempel med et ubestemt integral

$$\int 2x\cdot\cos(x)\,dx$$

Vi vælger at det er 2x, der skal differentieres, mens cos(x) skal integreres.
Vi starter med at skrive de fire størrelser op:

$$f(x)=2x,\quad g(x)=\cos(x),\quad f'(x)=2,\quad G(x)=\sin(x)$$

Nu sætter vi dem ind i formlen

$$\int 2x\cos(x)\,dx = 2x\cdot\sin(x) - \int 2\cdot\sin(x)\,dx$$

Det integral, vi har på højre side kan vi sagtens udregne.

$$\int 2x\cos(x)\,dx = 2x \cdot \sin(x) - \int 2 \cdot \sin(x)\,dx$$

$$= 2x \cdot \sin(x) - 2 \cdot (-\cos(x)) + c = 2x \cdot \sin(x) + 2\cos(x) + c$$

Vi tager også et eksempel med et bestemt integral, hvor vi skal bruge partiel integration 2 gange, før det giver noget resultat.

$$\int_0^1 x^2 e^{\frac{x}{2}}\,dx$$

Vi vælger, at vi vil differentiere x^2 og integrere e$^{x/2}$

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = e^{\frac{x}{2}}, \quad f'(x) = 2x, \quad G(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$$

Nu sætter vi ind i formlen

$$\int_0^1 x^2 e^{\frac{x}{2}}\,dx \ = [x^2 \cdot 2e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \int_0^1 2x \cdot 2e^{\frac{x}{2}}\,dx = [2x^2 e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \int_0^1 4x \cdot e^{\frac{x}{2}}\,dx$$

Det integral, vi er nået frem til på højre side, kan vi endnu ikke udregne. Derfor bruger vi partiel integration endnu engang.

$$h(x) = 4x, \quad k(x) = e^{\frac{x}{2}}, \quad h'(x) = 4, \quad K(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$$

Vi indsætter i formlen og får

$$[2x^2 e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \int_0^1 4x \cdot e^{\frac{x}{2}}\,dx = [2x^2 e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \left([4x \cdot 2e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \int_0^1 4 \cdot 2e^{\frac{x}{2}}\,dx\right)$$

Det sidste integral består kun af en enkelt funktion, og den kan vi sagtens integrere.
Alt i alt får vi:

$$\int_0^1 x^2 e^{\frac{x}{2}}\,dx = [2x^2 e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \left([4x \cdot 2e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - \int_0^1 4 \cdot 2e^{\frac{x}{2}}\,dx\right)$$

$$= [2x^2 e^{\frac{x}{2}}]_0^1 - [8x \cdot e^{\frac{x}{2}}]_0^1 + 16e^{\frac{x}{2}}]_0^1$$

$$= (2 \cdot 1 \cdot e^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot 0 \cdot e^0) - (8 \cdot 1 \cdot e^{\frac{1}{2}} - 8 \cdot 0 \cdot e^0) + (16e^{\frac{1}{2}} - 16e^0)$$

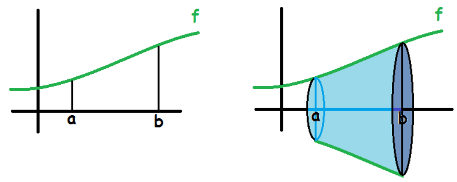
$$= 2e^{\frac{1}{2}} - 8e^{\frac{1}{2}} + 16e^{\frac{1}{2}} - 16 = 10e^{\frac{1}{2}} - 16 = 10\sqrt{e} - 16$$

4.5 Omdrejningslegemer

Et omdrejningslegeme (eller et rotationslegeme) er den tredimensionale figur, man får, hvis man roterer en funktion 360 grader rundt om x-aksen. Det er vigtigt, at funktionen er kontinuert, og at den kun har positive værdier.

Man kan beregne volumen af omdrejningslegemet ved hjælp af følgende formel

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$$



5 Differentialligninger

5.1 Hvad er differentialligninger?

En differentialligning er kort og godt en ligning, hvor der indgår en differentieret funktion som en af de ubekendte.

5.1.1 Partikulær løsning og fuldstændig løsning

Lad os se på en meget simpel differentialligning

$$y' = 5$$

Ved at integrere på begge sider, får vi, at

$$y = f(x) = 5x$$

er en løsning til differentialligningen. Men

$$y = f(x) = 5x + 8$$

er også en løsning til differentialligningen.
Disse to løsninger, kalder man *partikulære løsninger*. Der er nemlig uendeligt mange løsninger til differentialligningen, og disse to er blot nogle af løsningerne.
Den *fuldstændige løsning* på differentialligningen ville være

$$y = f(x) = 5x + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Ved at indsætte forskellige tal på c's plads, finder man de partikulære løsninger.
Ofte vil en opgave stilles med en startbetingelse, der afgør hvilken af de partikulære løsninger, man er på udkig efter.
F.eks.

$$y' = 5, \qquad y(2) = 4$$

Først finder vi den fuldstændige løsning

$$y = f(x) = 5x + c$$

og så finder vi den partikulære løsning ved at indsætte punktet $(2, 4)$ i ligningen og isolere c.

$$4 = 5 \cdot 2 + c \Leftrightarrow \tag{46}$$
$$4 = 10 + c \Leftrightarrow \tag{47}$$
$$c = -6. \tag{48}$$

Altså er løsningen til den givne opgave

$$y = f(x) = 5 \cdot x - 6$$

5.2 Gøre prøve

Ofte bliver man ikke bedt om at finde en løsning til en differentialligning, men bliver i stedet præsenteret for en funktion og spurgt om den løser differentialligningen.
Metoden til at bestemme dette kaldes "at gøre prøve".
Den går simpelthen ud på at indsætte funktionen på hhv. venstre- og højresiden og se om det giver det samme.

Eksempel Vi ønsker at undersøge om ligningen

$$f(x) = 2e^{16x}$$

er en løsning til differentialligningen

$$y' = 16y.$$

Først differentierer vi f.

$$f'(x) = 16 \cdot 2 \cdot e^{16x} = 32e^{16x}$$

Først udregner vi venstresiden.

$$V: \quad f'(x) = 32e^{16x}$$

og så udregner vi højresiden

$$H: \quad 16 \cdot f(x) = 16 \cdot \underbrace{2e^{16x}}_{f(x)} = 32e^{16x}$$

Da højre- og venstresiden er ens, betyder det, at funktionen f er en løsning til differentialligningen.

5.3 Løsninger til differentialligninger

Herunder følger et skema over forskellige differentialligninger og deres fuldstændige løsninger.
I de næste par afsnit vil vi gå mere i dybden med nogle af de forskellige typer. Dette skal altså mest ses som en oversigt.

differentialligning	fuldstændige løsning
$y' = k$	$y = k \cdot x + c$
$y' = h(x)$	$y = \int h(x)\,\mathrm{d}x$
$y' = k \cdot y$	$y = c \cdot e^{kx}$
$y' = b - ay$	$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$
$y' = y \cdot (b - ay)$	$y = \frac{b/a}{1+c \cdot e^{-bx}}$
$y' = ay \cdot (M - y)$	$y = \frac{M}{1+c \cdot \exp(-a \cdot M \cdot x)}$
$y' + a(x) \cdot y = b(x)$	$y = e^{-A(x)} \cdot \int b(x) \cdot e^{A(x)}\,\mathrm{d}x + c \cdot e^{-A(x)}$

Skemaet skal forstås på den måde, at c er en konstant, som afhænger af hvilken begyndelsesbetingelse, vi har fået (se evt. afsnittet om partikulære og fuldstændige løsninger)
I den nederste linje er $a(x)$ og $b(x)$ to funktioner, der afhænger af x (dvs. der kun indgår faste tal og x'er i udtrykkene). $A(x)$ skal forstås som en (vilkårlig) stamfunktion til $a(x)$.

5.4 Inhomogene lineære førsteordens differentialligninger

Den absolut sværeste differentialligning, du kommer til at møde i gymnasiet er af formen

$$y' + a(x) \cdot y = b(x)$$

Den kaldes en *inhomogen lineær førsteordens differentialligning.* Inhomogen hentyder til, at højresiden er forskellig fra 0. Ordenen af differentialligningen er den højest afledede (her y', men i en andenordens differentialligning ville y" også optræde).

Løsningen til den inhomogene lineære førsteordens differentialligning er

$$y = f(x) = e^{-A(x)} \cdot \int (b(x) \cdot e^{A(x)})\, dx + ce^{-A(x)}$$

Hvor A(x) er en vilkårlig stamfunktion til a(x).
Problemet med løsningsformlen er, at integralet kan være svært at udregne. Det er ikke altid, det overhovedet lader sig gøre. Men i visse tilfælde kan vi udregne det og nå frem til differentialligningens løsninger.
Her kommer et eksempel på lineære inhomogene førsteordens differentialligninger og deres løsninger.

Eksempel 1

$$y' + 4x^3y = 16x^3$$

Vi ser først, at

$$a(x) = 4x^3$$

og vi udregner stamfunktionen

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int 4x^3\,dx = \frac{1}{4} \cdot 4x^4 = x^4$$

Nu indsætter vi i løsningsformlen

$$y = f(x) = e^{-x^4} \int (16x^3 e^{x^4})\,dx + ce^{-x^4}$$

For at udregne integralet, bruger vi integration ved substitution
Vi sætter

$$t = x^4$$

dermed bliver

$$\frac{dt}{dx} = 4x^3$$
$$dt = 4x^3 dx$$
$$4dt = 16x^3 dx$$

Dette sætter vi nu ind i integralet.

$$y = f(x) = e^{-x^4} \int (16x^3 e^{x^4})\,dx + ce^{-x^4} = e^{-x^4} \int 4e^t\,dt + ce^{-x^4}$$

$$= e^{-x^4} \cdot 4e^t + ce^{-x^4}$$

Nu mangler vi bare at substituere tilbage og reducere en smule.

$$y = f(x) = e^{-x^4} \cdot 4e^{t} + ce^{-x^4} = e^{-x^4} \cdot 4e^{x^4} + ce^{-x^4}$$

$$= 4e^{x^4 - x^4} + ce^{-x^4} = 4e^0 + ce^{-x^4} = 4 + ce^{-x^4}$$

5.4.1 Specialtilfælde

Mange af de øvrige differentialligninger, vi har beskæftiget os med, er specialtilfælde af den inhomogene lineære førsteordens differentialligning.
Hvis funktionerne a(x) og b(x) begge er konstante, så bliver vores differentialligning

$$y' + a \cdot y = b$$

og hvis vi omformer den, får vi

$$y' = b - a \cdot y$$

som er differentialligningen for forskudt eksponentiel vækst, med løsningen

$$y = f(x) = \frac{b}{a} + ce^{-ax}$$

Hvis a er konstant og b(x)=0, får vi

$$y' + ay = 0$$

hvilket er det samme som

$$y' = -ay$$

som er differentialligningen for eksponentiel vækst, med løsningen

$$y = f(x) = ce^{-ax}$$

Hvis a(x)=0, og b(x) er en hvilken som helt funktion, får vi

$$y' = b(x)$$

som har løsningen

$$y = f(x) = \int b(x)\, dx$$

5.5 Separation af variable

Separation af variable er en metode til at løse differentialligninger, hvor y' er ganget med en funktion, der har med y at gøre.
Vi taler om differentialligninger på formen

$$y' \cdot f(y) = g(x)$$

Nogle eksempler på denne type differentialligninger er

$$\sin(y) \cdot y' = 5x^2$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos(x) + 8$$

$$(y^2 + 7\ln(y)) \cdot y' = \frac{\cos(x)}{e^x}$$

Man kan også være ude for, at man skal rykke lidt rundt på differentialligningen for at få den på den rigtige form.
Havde vi f.eks. differentialligningen

$$y' = y^3 \cdot x^2$$

så kunne vi rykke y^3 hen på venstre side (ved at dividere med det på begge sider af lighedstegnet). Så ville vi få denne ligning:

$$\frac{1}{y^3} \cdot y' = x^2$$

Her er $f(y)=1/y^3$, og $g(x)=x^2$.
Separation af variable går ud på, at man må integrere på begge sider af lighedstegnet. Man integrerer f(y) mht y, og g(x) mht x.

$$f(y) \cdot y' = g(x) \quad \Rightarrow \quad \int f(y)\, dy = \int g(x)\, dx$$

Bemærk, at y' forsvinder, når vi integrerer.

5.5.1 Eksempler

Eksempel 1 Vores differentialligning er

$$y^2 \cdot y' = 3x^2 + 5$$

Her er f(y)=y^2 og g(x)=$3x^2$+5
Nu må vi integrere venstresiden (pånær y') mht y og højresiden mht x.

$$\int y^2 \, dy = \int 3x^2 + 5 \, dx$$

Vi udregner integralerne og får

$$\frac{1}{3}y^3 = x^3 + 5x + c$$

Man behøver ikke sætte en integrationskonstant på hver side. Det er nok, at sætte den på højresiden.
Vi er interesserede i at bestemme y, så der er stadig lidt arbejde tilbage med at isolere y.
Først ganger vi ligningen igennem med 3.

$$y^3 = 3x^3 + 15x + c$$

Det er ligegyldigt at gange konstanten med 3, da en konstant ganget med en konstant bare giver en ny konstant.
Nu tager vi kubikroden (den tredje rod) på begge sider af lighedstegnet:

$$y = \sqrt[3]{3x^3 + 15x + c}$$

og nu har vi vores løsning.