Eksempel på disposition til mundtlig eksamen i matematik, STX

Opgave

Variabel sammenhæng

Redegør for graf og forskrift for eksponentiel sammenhæng. Bevis formlen til beregning af a ud fra to punkter

Introduktion til emnet

Jeg vil fortælle om variable sammenhænge, herunder den eksponentielle sammenhæng. En variabel sammenhæng kan fx. Være en lineær funktion, en eksponentiel funktion eller en potensfunktion. Det begræbet 'variabel sammenhæng' dækker over, er at man beskriver hvordan to varierende størrelser hænger sammen. De to variable kalder man ofte x og y. Det er altså tal der varierer. Én sammenhæng kan beskrives: y=5x+7.

Redegørelse for graf og forskrift for eksponentiel sammenhæng

Grafen for en eksponentiel sammenhæng y=b·a^x er en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem. (tegn et eksempel på grafens udseende i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem og et 'normalt' koordinatsystem.). Bemærk her, at grafen aldrig krydser 1. aksen.

b er skæring med y-aksen/begyndelsesværdien
a er fremskrivningsfaktoren

a kaldes fremskrivningsfaktoren og er den værdi der styrer om grafen er aftagende eller voksende.
Sætter man x-værdien til 0 får vi et udtryk: y=b·a^0, da a^0 bliver 1 bliver hele udtrykket y=b hvilket giver os svar på hvorfor vi kalder b for begyndelsesværdien.
Vokser x med en, vokser y med en faktor a

$$y_1 = b \cdot a^x$$
$$y_2 = b \cdot a^{x+1} = a \cdot y_1$$

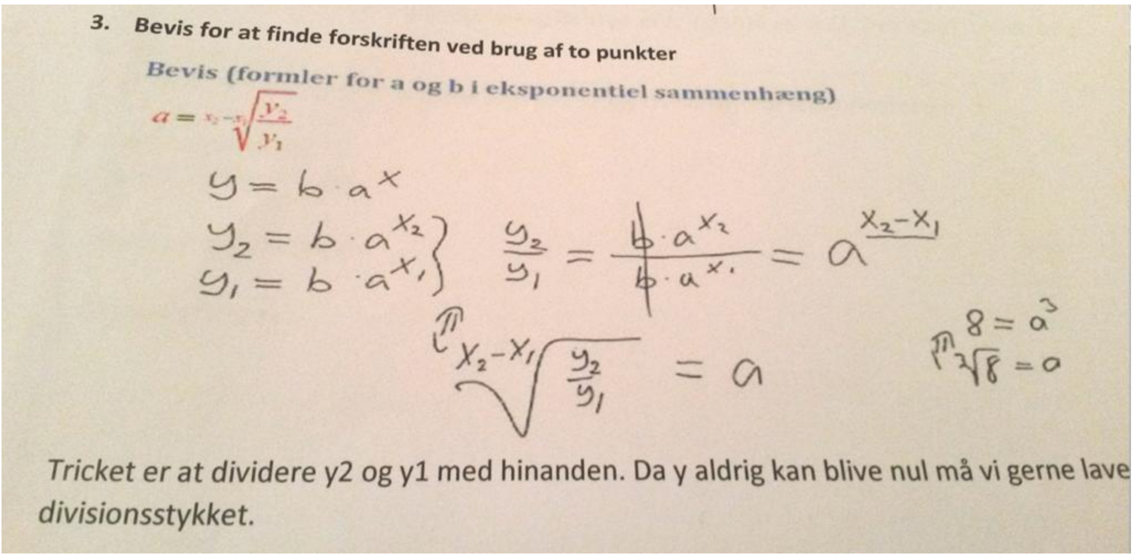
grafen er voksende hvis a er større end 1grafen er aftagende hvis a er mellem 0 og 1
grafen er konstant y=b, hvis a=1.
y-værdien kan ikke blive 0 eller negativ

Forklar hvorfor:
Det følger trivielt at y > 0, da både a og b er større end nul.

Med fordel kan man på A-niveau argumentere ud fra differentialkvotienten. Der gælder jo $(b * a^x)' = \ln(a) * b * a^x$. Fortegnet er således bestemt af ln*(a).* Ud fra argumenter for den naturlige logaritme gælder derfor at funktionen er aftagende for 0<a<1. konstant for a=1 og voksende for a>1.

Den eksponentielle udvikling er begrænset til følgende:
a>0, b>0, $x \epsilon \mathbb{R}, Dm(f) = \mathbb{R}, Vm(f) = \mathbb{R}+$

Bevis for formlen til beregning af a ud fra to punkter



3. Bevis for at finde forskriften ved brug af to punkter

Bevis (formler for a og b i eksponentiel sammenhæng)

$a = \sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$

$y = b \cdot a^x$

$\left.\begin{array}{l} y_2 = b \cdot a^{x_2} \\ y_1 = b \cdot a^{x_1} \end{array}\right\} \quad \frac{y_2}{y_1} = \frac{\cancel{b} \cdot a^{x_2}}{\cancel{b} \cdot a^{x_1}} = a^{x_2-x_1}$

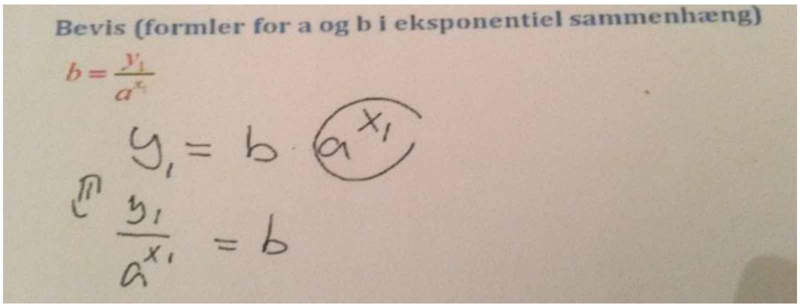
$\Updownarrow$

$\sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = a$

$8 = a^3$

$\Updownarrow$ $\sqrt[3]{8} = a$

Tricket er at dividere y2 og y1 med hinanden. Da y aldrig kan blive nul må vi gerne lave divisionsstykket.



Bevis (formler for a og b i eksponentiel sammenhæng)

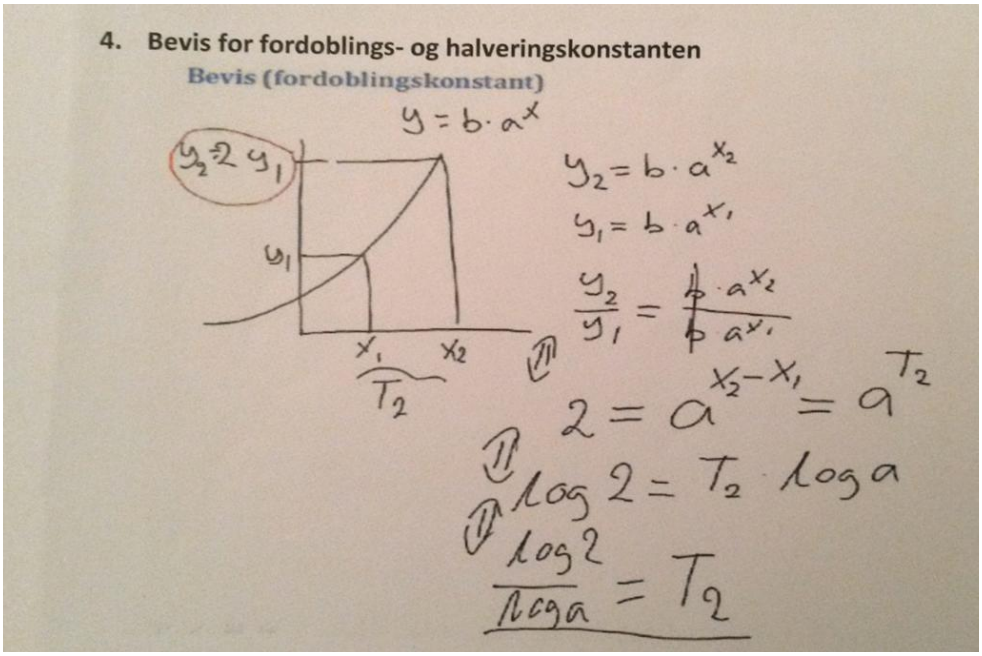
$b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$

$y_1 = b \cdot a^{x_1}$

$\Updownarrow$

$\frac{y_1}{a^{x_1}} = b$

Bevis for fordoblingskonstanten



Forklaring af fremskrivning og renter

Korklar kort om forskriften:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

Lav et eksempel:
Hvis vi ved at vi får 3% i månedlig rente, får vi på et år:
1,03^12 på et år. Dvs. 42,6% i rente årligt.

Vi kan opstille ligningen for hvilken stigning vi får på to år, hvis vi starter med 100 kr og får 2% i årlig rente:

$$K_2 = 100 \cdot (0{,}02 + 1)^2 \approx 104{,}04$$

Bemærk at beløbet er STØRRE end 104, da vi jo andet år får renterne af renterne fra første år.